談方程式論

林 一 鵬

方程式論是高中數學第六册的主要題材。以往課本的內容多以范氏大代數（1903年）爲範本，其中以沈璿先生著的沈氏本（世界書局出版）最爲有名，他們書中有關方程式的部份大略包括下列諸節：(1)一元 n 次方程式(2) 方程式的根 (3) 因式定理 (4) 重根及有理根 (5) 根與係數的關係 (6) 根的對稱式 (7) 無理根定理 (8) 虛根定理，(9) 方程式的變換 (10) 根的上限與下限 (11) 連號與變號 (12) 笛卡爾法則 (13) Horner 氏之方法 (14) 一元三次方程式之解法 (15) 一元四次方程氏之解法。而學校教學着重在 (5)，(6) 與 (9) 三方面的演練，一則因爲這幾節的題目較富於變化，再則由於此類題目常見諸於大學聯考試題。

民國六十一年教育部重訂「高中數學課程標準」，規定方程式論應概括 (1) 根與係數 (2) 對稱多項式基本定理 (3) 多項式函數之泰勒展開 (4) 多項式函數之圖示 (5) 代數基本定理之敍述 (6) 附錄 史篤姆定理，結式，判別式。實驗本第六册方程式論就是根據這個標準寫成的。編時感覺困難的地方很多，如函數的圖示要深淺到何種程度？對稱式基本定理的證法很多，究竟應採取那種證法，才能使學生更容易接受？Lagrange插入法的意義應如何表達？多項式函數之。泰勒展開其實只是一些方程式的平行變換，另闢一節說明有必要嗎？三角函數的展開適不適合在高中介紹？

事實上，討論方程式的種種內容，其存在定理及求根方法是最重要的主題。所謂存在定理即「一個復係數的一元 n 次方程式必有一複數根」，此亦即所謂的「代數基本定理」。而求根的方法亦有多種，如二分法， Horner's 公式，牛頓求根法等。反觀以往各種高中數學的版本及 61 年後的四個版本，皆未能抓住重點，而讀者亦捨本逐末，一味追求形式的演練。究其原因，不外乎大家都認爲證明存在定理需要所謂更深的數學工具，而求根的方式又太瑣碎之故。

對於方程式論筆者建議不必那麼形式化地另闢一章，可把根與係數的關係及根的對稱式適當地轉入他册（如第一册多項式函數部門），而增加簡易微積分與牛頓求根法。

下面試舉一代數基本定理的證明（高斯之一證法），筆者認爲不是想像中地那麼難，**所謂需要高深數學工具亦未必見得**，有大部份高中數學的知識已夠，只以下證明中 $(c,2)$ 的地方需要擴展體（extension field）的基本知識，如果在講解時能深入淺出地說明（不要像大學代數課那樣公理化作起），相信高中學生是會欣賞的。

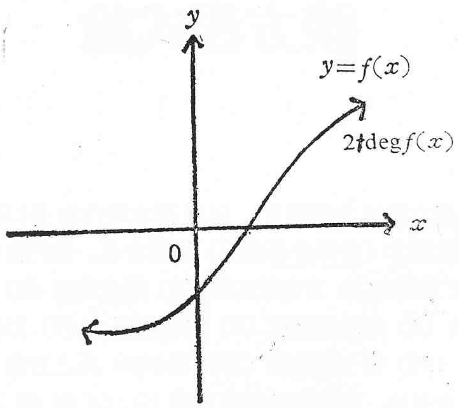
代數基本定理（註一）設 $g(x)\in\mathbb{C}[x]$，則 $g(x)=0$ 有一複數根。

證明:

(a) 可先證任一實係數方程式 $f(x)=0$ 有一複數根；因若 $g(x)\in\mathbb{C}[x]$，則 $g(x)\cdot\overline{g(x)}\in R[x]$，其中 $\overline{g(x)}$ 是 $g(x)$ 的共軛多項式（即把 $g(x)$ 的係數全改爲其共軛複數）。故若已證出 $g(x)\cdot\overline{g(x)}=f(x)=0$ 有一根 α，則 $f(\alpha)=g(\alpha)\overline{g(\alpha)}=g(\alpha)\cdot g(\overline{\alpha})=0$，故 α 或 $\overline{\alpha}$ 是 $g(x)=0$ 之根。

(b) 可以假設 $\deg f(x)$ 是偶數；因若$f(x)$的次數爲奇數，$\deg f(x)=2n+1$，$f(x)=x^{2n+}+\cdots\cdots+a_0$（可以化爲首項係數$=1$，而討論之），則

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{且} \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{（參見下圖）}$$



實係數函數 $y=f(x)$，一端趨於正無窮大，另一端趨於負無窮大，由中間值定理知，必存在一實數 α 滿足 $f(\alpha)=0$。

(c)

(1) 設 $\deg f(x)=2^n q$，$(q,2)=1$，則當 $n=0$ 時，由 (b) 已證出，設 $n-1$ 時成立，我們想證明 n 時亦成立（歸納法）。

（註一）特此謝謝李白飛先生告訴我有這樣證法。

(2) 設 $f(x)=x^{2^nq}+a_{2^nq-1}\cdot x^{2^nq-1}+\cdots\cdots a_0$; $a_i\in R$, $\forall i$, 今以 $a_0,a_1,\cdots\cdots,a_{2^nq-1}$ 與所有的有理數利用加，減，乘，除所做成的數寫爲 $\mathbf{F}=\mathbf{Q}(a_0,a_1,\cdots\cdots,a_{2^nq-1})$（通常稱 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的有限擴展體），則 $f(x)\in\mathbf{F}[x]$。由 Kronecker 定理（註二），我們可以構造出一個 $\mathbf{F}$ 的擴展體 $\mathbf{E}=\mathbf{F}[\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_{2^nq}]$，使得 $f(x)=0$ 的根，恰好就是 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_{2^nq}$。

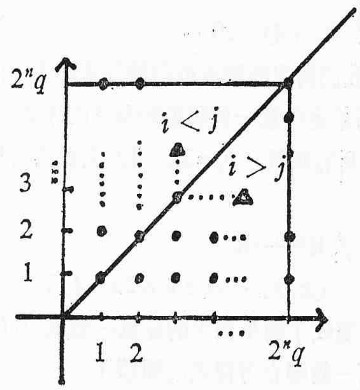
(3) 下面的步驟就是要證明其中某一個 α_i 是複素數。對於任一正整數 m，定義

$$g_m(x)=\prod_{i>j}^{2^nq}(x-\alpha_i-\alpha_j-m\alpha_i\alpha_j)\in\mathbf{E}[x],$$

(i) $\deg g_m(x)=2^{n-1}q(2^nq-1)$，因爲下圖方格內的格子點 $S=\{(i,j)\mid 1\le i\le 2^ng,1\le j\le 2^nq\}$ 共有 $2^nq\cdot 2^nq$ 個。對角線上有 2^nq 個，對角線上部 S_u 與下部 S_l 的格子點一樣 卽（令其爲△），

多 $S_u=\{(i,j))\in S\mid i<j\}$，$S_l=\{(i,j)\in s\mid i>j\}$，且 $\#(S_u)=\#(S_l)=\triangle$

故 $2\triangle+2^nq=2^nq\cdot 2^nq$，得 $\triangle=2^{n-1}q(2^nq-1)$



(ii) $g_m(x)$ 的係數皆爲實數；設 $g_m(x)=x^t+b_{t-1}x^{t-1}+\cdots\cdots\ b_0$, $t=2^{n-1}q(2^nq-1)$，知其中 b_i 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{2^nq}$ 的對稱式，現在利用對稱式基本定理知每一個 b_i 可以表爲 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{2^nq}$ 基本對稱式的多項式，這些基本對稱式就是 $a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{2^nq-1}$，故皆爲實數。

(iii) $\deg g_m(x)=2^{n-1}q(2^nq-1)$，其中 q, 2^nq-1 皆爲奇數，而 2 個冪只有 $n-1$，由歸納法知 $g_m(x)=0$ 有一複數根 β_m

(iv) 從 (iii) 知對於任一正整數 $m\in N$，有一組 (i,j) 使得 $\alpha_i+\alpha_j+m\alpha_i\alpha_j=\beta_m\in C$，因爲 $\#(N)=\infty$，故存在二個不同的 $m,m'\in N$ 與同一組 (i,j) 使得

$$\begin{cases}\alpha_i+\alpha_j+m\alpha_i\alpha_j\in C & \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \alpha_i+\alpha_j+m'\alpha_i\alpha_j\in C & \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由 (1)−(2) 得 $(m-m')\cdot\alpha_i\alpha_j\in C\Longrightarrow\alpha_i\alpha_j\in C$

$(\because m-m'\neq 0)\Longrightarrow\alpha_i+\alpha_j\in C$（代入(1)）

卽得
$$\begin{cases}\alpha_i\alpha_j\in C & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ \alpha_i+\alpha_j\in C & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

解 (3)(4) 得 $\alpha_i\in C,\alpha_j\in C$, **Q.E.D.**

（註二）大家都知道要使 $x^2+1=0$ 有根，必須在實數外尋找，因此創出一個虛數 i，而且把實數擴大到複素數，仿此我們亦可以把數的範圍加大，創出一些超複數來，使得 $f(x)=0$ 有根。這就是 Kronecker 定理的基本精神。