# 從一個小題目談到
# 潛藏於其中的某些概念

葉 東 進

本文作者現爲臺中市私立曉明女中數學教師。本刊深切期待此類實際教學心得的稿件，盼各校教師能沿此方向貢獻心力，以公諸大衆。

——編者

有一次一個學生拿了一道題目的兩種解法，要我找出它們之間的差異，而且其中的一種解法雖然得到了正確的答案，但過程中卻頗有問題。

伊的題目是：若 $x,y$ 爲實數且滿足 $2^x=5^y=10^3$，求 $1/x+1/y$ 之值。

伊的兩種解法是：

**第一法**：$2^x=5^y=10^3 \Longrightarrow \begin{cases} 2=10^{\frac{3}{x}} \\ 5=10^{\frac{3}{y}} \end{cases} \Longrightarrow 10=10^{\frac{3}{x}}\cdot 10^{\frac{3}{y}} \Longrightarrow \dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$　#

**第二法**：$2^x=5^y=10^3 \Longrightarrow 2^x\cdot 5^y=10^3\cdot 10^3=10^6=2^6\cdot 5^6$

$$\Longrightarrow 2^x/2^6=5^6/5^y \Longrightarrow 2^{x-6}=5^{6-y} \Longrightarrow x-6=6-y=0$$

$$\Longrightarrow x=6=y \Longrightarrow 1/x+1/y=1/3 \quad \#$$

我們看到兩種解法得到相同的答案，但過程卻完全不同。我說第一法是正確的，而第二法卻有一些問題（俗謂誤解）。首先注意到第二法中的 $x=y=6$ 並未滿足原題的條件 $2^x=5^y=10^3$，當然，問題並不僅此，第二法中的邏輯錯誤並非只發生於該題的做法，很多題目的似是而非的解法，實源自於這共同的錯誤推理，錯誤何在？讓我先提出一些題目來：

1. $2^x=5^y=10^3 \Longrightarrow 2^x\cdot 5^y=10^6$ 這個推論沒有問題，但 $2^x\cdot 5^y=10^6 \Longrightarrow 2^x=5^y=10^3$ 對嗎？〔註一〕
2. $2^{x-6}=5^{6-y} \Longrightarrow x=y=6$ 這個推論成立嗎？〔注意：$x=y=6 \Longrightarrow 2^{x-6}=5^{6-y}$ 卻是正確的〕〔註二〕

〔註一〕 $2^x\cdot 5^y=10^6 \Longrightarrow 2^x=5^y=10^3$ 這個推論是不成立的，它的道理就跟 $a\cdot b=c^2 \Longrightarrow a=b=c$ 的謬誤是一樣的。

〔註二〕 $2^{x-6}=5^{6-y}$ 是一個未定方程，有無限多解，理由是對任意正實數 $\alpha$ 若滿足 $2^{x-6}=5^{6-y}=\alpha$ 相應的便有一組解 $(x,y)$，$x=6+\log_2\alpha$，$y=6-\log_5\alpha$。$x,y$ 都是 $\alpha$ 的函數其值隨 $\alpha$ 之給定而確定。$x=y=6$ 只不過是 $\alpha=1$ 時所相應的解而已。

其實這兩個題目都只是底下這個更重大的問題的特例而已: **一個代數式將之變換成另一形式以適合某種需要時，這另一形式是否仍與原式邏輯同義? 若不，那麼在變換的過程中增減了些什麼? 〔請注意：增減了些什麼? 〕**

我說這是一個重大的問題是因爲: 變換形式常是解決問題的必要手段。試以下列數例說明。

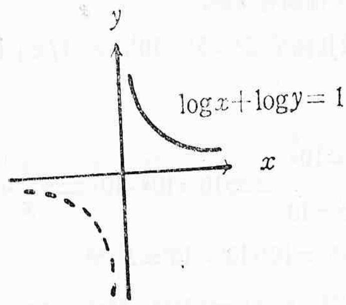
1. 座標平面上，$\log x+\log y=1$ 所表圖形爲何?

$\log x+\log y=1$ 這式子的成立，先天上就受到 $x>0$ 及 $y>0$ 的限制（何故? ），因此將 $\log x+\log y=1$ 變形時要特別注意這個限制的作用。

$$\log x+\log y=1 \Longrightarrow \log xy=\log 10 \Longleftrightarrow xy=10$$

最後這個式子表示一個雙曲線，但注意在從 $\log x+\log y=1$ 變形爲 $xy=10$ 的過程中的第一步驟並不可逆（爲什麼? ），因此 $\log x+\log y=1$ 的圖形應只是 $xy=10$ 的一部份而已，那倒底增加了些什麼?

注意到 $\log xy=\log 10$ 中的 $x$ 與 $y$ 僅須同號即可（何故? ），換句話說，$x,y>0$ 或 $x,y<0$ 均可，而原式的先天條件是 $x,y>0$，因此增加的應是 $x,y<0$ 的部份，在圖形上的意義則是增加了第三象限部份的圖形，因此 $\log x+\log y=1$ 的圖形只是 $xy=10$ 在第一象限的那部份圖形，即是雙曲線的一葉，如下圖所示:




2. 解聯立式 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ xy=\sqrt{3}/2 \end{cases}$ （這個聯立式的意義是求 $1+\sqrt{3}i$ 之平方根的一個過程）

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \cdots\cdots(1) \\ xy=\sqrt{3}/2 \cdots\cdots(2) \end{cases} \Longrightarrow (x^2-y^2)^2+4x^2y^2=4 \Longleftrightarrow (x^2+y^2)^2=4 \Longleftrightarrow x^2+y^2=2$$

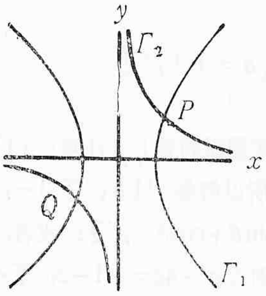
（注意: 上述的第一步驟並不可逆，何故? ）

結果，把聯立式 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ xy=\sqrt{3}/2 \end{cases}$ 變形爲 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 解之，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\pm\frac{1}{2}$

即得四解: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

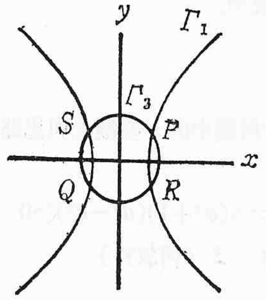
但其中有二解是不對的，因爲 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ xy=\sqrt{3}/2 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 沒有邏輯同義。〔欲知那二解不對，可以從 $xy=\sqrt{3}/2>0$ 知 $x,y$ 應同號，所以 $(\sqrt{3}/2,-1/2),(-\sqrt{3}/2,1/2)$ 是不對的兩組解〕。

或者從幾何的觀點來看，前者之解應是兩個雙曲線的交點，而後者則是一個雙曲線與一個圓的交點，分別圖示如下:




$\begin{cases} x^2-y^2=1 \cdots\cdots \Gamma_1 \\ xy=\sqrt{3}/2 \cdots\cdots\cdots \Gamma_2 \end{cases}$ 的兩交點爲

$$P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\ Q=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$




$\begin{cases} x^2-y^2=1 \cdots\cdots \Gamma_1 \\ x^2+y^2=2 \cdots\cdots \Gamma_3 \end{cases}$ 的四交點爲

$$P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\ Q=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$R=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\ S=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

3. 若 $a,b,c$ 爲正數，問 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ 是否成立？

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc &\Longleftrightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geq 6abc\\ &\Longleftrightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-2abc-2abc-2abc\geq 0\\ &\Longleftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0\end{aligned}$$

因爲最後一式是一正確的敍述，所以原式 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ 亦是正確的敍述（順便可以從最後一式看出＝成立的條件是 $a=b=c$）

〔也許有人以爲這問題利用算術均數≥幾何均數要來得快，不錯，但我們寧可不利用什麼公式而僅依自然推理得到想要的答案；況且上述的利用變形，邏輯同義等觀念將我們所欲知道的問題化簡爲更簡單而易於判斷的形式，這種具有分析味道的方法不是很值得介紹給學生嗎？〕

現在回頭來看看本文開始時提出來的問題與解法。照題意，求 $1/x+1/y$ 之値，顯然答案只是求 $2^x=5^y=10^3$ 的一個必然結果，由於原題 $2^x=5^y=10^3$ 中的 $x$ 與 $y$ 都是唯一解（$x=3/\log 2$, $y=3/\log 5$）所以 $1/x+1/y$ 亦是唯一解〔$1/x+1/y=\log 2/3+\log 5/3=\log 10/3=1/3$〕。

其實這題要是問：若「$2^x=5^y=10^3$，則 $x$ 與 $y$ 之値各爲何？」
問題便清楚得多，$x$ 與 $y$ 能扯上這麼漂亮的關係：$1/x+1/y=1/3$，只是一種巧合而已（因爲 $2\cdot 5=10$），但如果從 $1/x+1/y=1/3$（是一個未定方程，有無限多解）來考慮原題 $2^x=5^y=10^3$ 時，一些問題便跟着發生了〔既然 $2^x=5^y=10^3 \Longrightarrow 1/x=1/y+1/3$，而 $1/x+1/y=1/3 \not\Longrightarrow 2^x=5^y=10^3$，當然就應有無限多組解滿足 $1/x+1/y=1/3$ 而不滿足 $2^x=5^y=10^3$，所以 $x=y=6$ 只是其中的一組而已，事實上既要滿足 $1/x+1/y=1/3$ 又要滿足 $2^x=5^y=10^3$，那就只有 $x=3/\log 2$, $y=3/\log 5$ 了〕。

說到這裏，順便一提數學傳播第一期，$p.$ 66〔例 9〕的「誤解」。原題是：

「設 [illegible] $\cos\theta$ 爲方程式 $x^2-ax+a=0$ 之二根，求 $a$ 之解集。」

「誤解」(照抄)：

由根與係數之關係得 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a\cdots\cdots(1)\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=a\cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(1)^2-2\times(2)$得 $1=a^2-2a\cdots\cdots(3)$ $\therefore a^2-2a-1=0$, $\therefore a=1\pm\sqrt{2}$

$\therefore$ $a$ 之解集為 $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$

這當然是誤解，誤解的地方在於「代數式變換形式後未與原式邏輯同義」〔注意：(1), (2) $\Longrightarrow$(3)，但 (3)$\not\Longrightarrow$(1),(2)（何故？）也就是有增根產生了，所以解集 $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$ 中一定至少有一元素是不對的，$1+\sqrt{2}$ 當然是不合理的，因爲 $\sin\theta+\cos\theta\leq\sqrt{2}$；或者，從另一觀點來看，以 $a=1+\sqrt{2}$ 代入原方程 $x^2-ax+a=0$ 得判別式 $a^2-4a=-1-2\sqrt{2}<0$，無實根，與已知條件矛盾，故 $1+\sqrt{2}$不合〕。我覺得，**有時候讓學生瞭解一個題目的誤解所在要比瞭解一個正解更爲重要，**這並不單是因爲它糾正了錯誤的觀念，而且常會使我們跟着發現一些新的問題，而這些新的問題又往往能澄清某些概念。今舉一例說明。

有一次一個學生提出這樣的問題：

設 $a>1$，若 $a^{2x}+(1-a^2)\cdot a^x-a^2\geq 0$，求 $x$ 的範圍。

（這個題目沒什麼意思，不過我們着重的不是這題目本身，而是解題中的一些觀念與思路）。

如果這樣解，是沒問題的：

$$a^{2x}+(1-a^2)\cdot a^x-a^2\geq 0\Longleftrightarrow(a^x)^2+(1-a^2)\cdot a^x-a^2\geq 0\Longleftrightarrow(a^x+1)(a^x-a^2)\geq 0$$
$$\Longleftrightarrow a^x-a^2\geq 0\ \text{（何故？）}\Longleftrightarrow x\geq 2\ \text{（何故？）}$$

這位學生的解法是這樣的：

令 $u=a^x(>0,\forall x\in R)$，則原式變爲 $u^2+(1-a^2)\cdot u-a^2\geq 0$

他看到最後這不等式就想起了一個這樣的定理（記爲$T$定理）：

$$A>0,\ (Ax^2+Bx+C\geq 0,\forall x\in R\Longleftrightarrow B^2-4AC\leq 0)$$

於是 $(1-a^2)^2+4a^2\leq 0\Longrightarrow(a^2+1)^2\leq 0$ （這個結果太離譜了?!）

（他這樣的想法是太離譜了，因爲距他所要求的答案太遠了，但我們如何告訴他走錯了路呢？）

我提醒他，$T$定理中所需的是 $\forall x\in R$，而式子 $u^2+(1-a^2)u-a^2\geq 0$ 並沒有對 $\forall u\in R$ 都滿足，實際上只是對所有 $u>0$ 而已。所以我接着問伊：

$$A>0,(Ax^2+Bx+C\geq 0,\forall x>0)\ \text{在什麼情況下才會成立?}$$

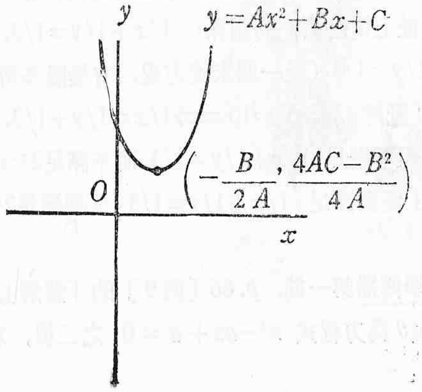
〔我建議伊利用座標平面上的幾何圖形來分析可能較爲清楚〕

這個式子成立的可能情況有兩種：

**第一種是 $B^2-4AC\leq 0$ 時**

此時，因 $Ax^2+Bx+C\geq 0,\forall x\in R$，所以對於所有 $x>0$，仍有 $Ax^2+Bx+C\geq 0$

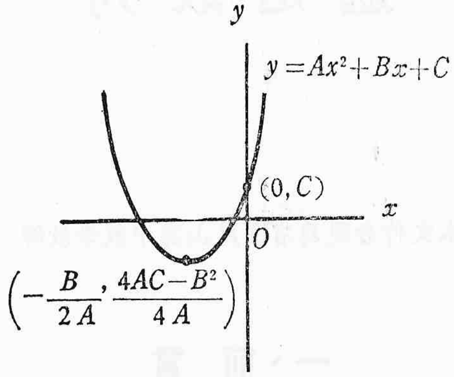
〔這個時候的幾何意義乃是拋物線 $y=Ax^2+Bx+C$ 的圖形恒在$x$軸的上方，如下圖所示〕



**第二種是 $B^2-4AC>0$ 時**

此時還須$B>0$及$C\geq 0$才能使 $Ax^2+Bx+C\geq 0$‘ $\forall x>0$ 成立

〔這個時候的幾何意義乃是抛物線$y=Ax^2+Bx+C$之圖形頂點在$x$軸下方，頂點在第三象限：而$y$截距則不爲負數。如下圖所示〕




〔順便一問：當 $B^2-4AC>0$ 且 $B<0$, $C\geq 0$ 時，是否能使 $Ax^2+Bx+C\geq 0$, $\forall x>0$成立？何故？〕

待伊得到上述的結論後，再回頭看伊自己的疑問，就知道問題跟上述的$T$定理扯不上直接的關係，因此就不能朝利用定理$T$這條路走。伊必須考慮條件的成立與否。

舉這些例子來說明，並不表示這些問題有代表性，但無疑的，這些問題中的分析與思路都是有相當意義的。本文目的卽在指明：做一個問題並不是求得其解便算是了結，更要深入瞭解解題過程中所使用的觀念與方法。在學得更新的東西之後要再回頭來看看以往所做所學的問題，設法以更新更高的觀點來分析問題，解釋問題，往往能因此而把所學的東西連貫起來，並更進一層地瞭解以往所學的。「溫故而知新」不就是這個意思嗎?!