在課堂上我如何架起
二次式標準化與固有値之間的橋樑

本文作者現爲省立新竹女中數學教師。

王淑霞

一、前　言

一般人（我指的是我所接觸的中學數學工作者及學習者）每次一提起固有值理論，總覺得它好像很難，不易學習；事實上，這個理論本身並不難，只要從實驗本第四册第 203 頁唸起，唸到 208 頁，再動動筆作作例題，習題，不出二小時就可了解「固有值理論」是在做什麼了。

理論本身這麼容易，爲什麼一般人一提到它總是面現難色？追究起來，發現問題在二次式標準化的問題如何走向固有值理論？這之間的橋樑到底是怎樣架起來的？

實驗本第四册第 201 頁有一段「問題分析」，已回答了上述的問題，但唸起來（至少在我的感覺）心理總還是有個橋沒架好的感覺，尤其在第 201 頁最後一行“若取一線性映射”這句話，總覺得它引入的很突然，爲什麼你知道要取這樣的線性映射？再看數學教室第 IV 及 VII 期中有關「固有值怎麼教」的資料，仍無法抹去心底這點感覺，因此，我趁着這段教學需要，把這段「問題分析」作得更完整一點，概念還是一樣，只是把話講得更「白」一點（有感於「白話數學運動」這句話）。

二、本　文

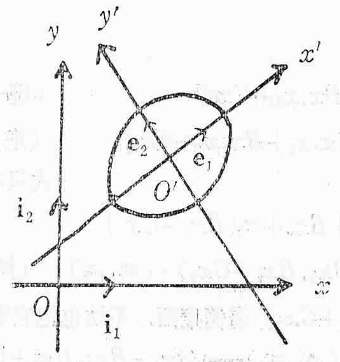
以下是我在課堂上對學生的說明。爲求簡明，我分款討論如下:

（I）不要忘了第四册第四章的主題是「如何將二次式標準化」。

（II）橢圓（暫時只考慮橢圓）的方程式如果要化成標準型的話，須取座標軸爲橢圓的長短兩個軸，但已知對原座標系（$O; x, y$）的橢圓方程式爲:

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

我們怎樣去找得新軸的基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$？抓兇手也要知道他的相貌特徵，當然找 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 我們先得知道這種東西有什麼特徵性質，不然要從何找起？故要標準化的問題，歸結於求 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 的問題，而求 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 的問題又歸之於找 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 有何特徵性質。



(III) 當然我們只有就所給的資料

$$(O;x,y) \text{ 及 } f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

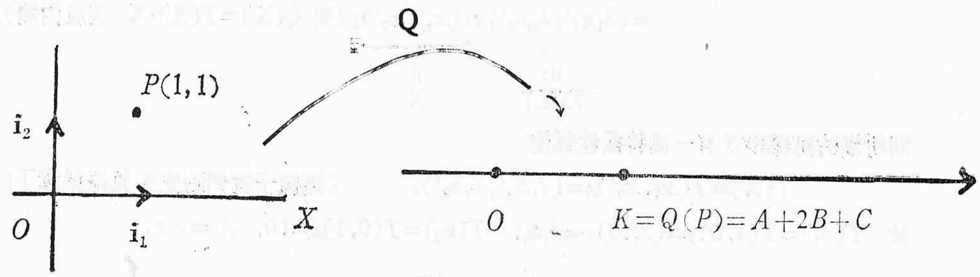
去找了。由平移的常識，知道要消去 (1) 式中的一次項並不難，難在消去 xy 項。故爲了簡化問題，集中注意，不妨只對 $f(x,y)$ 中的二次項加以處理。設 $Q(x,y)$ 表示 $Ax^2+2Bxy+cy^2$，此時$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ 所代表的橢圓對稱心就落在原點。

(IV) 以下將 (x,y) 改記爲 (x_1,x_2) 對於 $Q(x_1,x_2)$ 想想看，有什麼辦法？它只不過是一個二元二次齊次多項式？哦！對了，由多項式可引出多項式函數（這是第一册裡學的），不妨把 $Q(x_1,x_2)$ 看成是函數：

$$Q:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$$

其中：$(x_1,x_2)\longrightarrow Ax_1{}^2+2Bx_1x_2+Cx_2{}^2$…………(2)

注意在(2)的函數式裡，雖沒有明言，但事實上，它是根據原來座標系 $S_0\equiv(O;\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2)$ 來表達，平面$\mathbf{R}^2$ 上的一個點如何對應一個值，這個函數對應是借了這個座標系表達來的；但不管怎樣，這個函數的對應是決定了。例如$P=(1,1)$ 的話，$Q(P)=Q(1,1)=A+2B+C$



以後，不管在 $\mathbf{R}^2$ 上如何換座標系，反正Q這個函數線是把上圖示中的P點帶到K的。雖然座標系的改變，會使表達函數Q的形式改變。

(V) 因爲$B\neq0$，對S_0座標系，函數Q的表示式 $Q(x_1,x_2)=Ax_1{}^2+2Bx_1x_2+Cx_2{}^2$稍嫌複雜，我們希望換成 $S\equiv(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ 使函數Q借S表示的式子是缺 xy 項，即形成 $Q(x_1',x_2')_S=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2$ 的樣子。

(VI) 爲了達到 (V) 中的目的，首先有個需求，我想這個需求是自然的，總得把函數Q 以一個不依賴座標系表示的式子表示。**想想看！** 在我們所學過的東西裡，有那一種是 $\mathbf{R}^2$ 裡的東西，而又可不依賴座標系表示？啊！對了，向量。好吧！讓我們嘗試看看能否把 $Q:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ 以向量的語言表示之，但Q把 $\mathbf{R}^2$ 變成 $\mathbf{R}$（向量變成數量），想想看，向量運算中有那一種是把向量作用後變成數的？哦！對了，是內積。好吧！讓我們嘗試看能否把函數Q向以

量的內積表示之

(VII) 看: $Q(x_1,x_2)=Ax_1^2+2Bx_1x_2+Cx_2^2$ （玩一下這個式子吧！）

$=Ax_1^2+Bx_1x_2+Bx_1x_2+Cx_2^2$ （把 $2Bx_1x_2$ 平均分配一下吧！原式只有三項，中國人都喜歡雙嘛！）

$=x_1(Ax_1+Bx_2+x_2(Bx_1+Cx_2)$

$=(Ax_1+Bx_2,Bx_1+Cx_2)\cdot(x_1,x_2)$ （換成內積的樣子）

再看看 (Ax_1+Bx_2,Bx_1+Cx_2) 這個東西，不妨也把它看成函數:

$$(x_1,x_2)\longrightarrow(Ax_1+Bx_2,Bx_1+Cx_2)$$

同學們，這個函數是什麼函數，面不面熟? （在這兒不妨停頓一下，問問同學）

哈！是第一章學過的 $\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2$ 的線性映射:

$$T:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2,\quad T(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

「養兵千日，用在一時」，說不定，等一下我們要用到線性映射的性質，學了半天的線性映射，居然派上用場了。

(VIII)到此，我們有: 設 $\mathbf{X}=(x_1,x_2)$ 則 $Q(\mathbf{X})=T(\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}$

哈！終於達到目的了。這是一個和座標系無關的函數式子，是不? 若$\mathbf{X}$以座標系S表示就根據S座標系去算$T(\mathbf{X})$ 再算 $T(\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}$。(思想到此，我想: 同學心裡一定會讚嘆道: 啊！今天眞是個好日子，看！在數學的領域裡，你想要什麼，只要肯去追求，必可得到什麼，誰說數學是枯燥的！)

(IX) 既有 $Q(\mathbf{X})=T(\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}$ 的結果，讓我們再回到主旨，找適當的座標系 $S\equiv(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ 使:

$$Q(\mathbf{X})=Q(x_1',x_2')_S=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2$$

$$=\underbrace{(\lambda_1x_1',\lambda_2x_2')_S}_{\substack{\parallel\\ T(\mathbf{X})}}\cdot\underbrace{(x_1',x_2')_S}_{\substack{\parallel\\ \mathbf{X}}}$$ (將 $Q(\mathbf{X})=T(\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}$ 表成內積)。

即所求的座標系S有一個特徵性質使

$T(\mathbf{X})=T(x_1,x_2')_S=(\lambda_1x_1',\lambda_2x_2')_S$ （這樣子我們的兇手眞相畢露了！）

故 $T(\mathbf{e}_1)=T(1,0)_S=(\lambda_1,0)_S=\lambda_1\mathbf{e}_1$; $T(\mathbf{e}_2)=T(0,1)_S=(0,\lambda_2)_S=\lambda_2\mathbf{e}_2$

(X) **複習與總結:**

(i) 標準化二次式 $Q(x_1,x_2)=Ax_1^2+2Bx_1x_2+Cx_2^2$ 的問題，變成要找新座標系 $S\equiv(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$，又找$S\equiv(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$的問題，變成是對線性映射:

$$[T]=\begin{pmatrix}A\,B\\ B\,C\end{pmatrix}$$

要找$\mathbf{e}_i,\lambda_i$ 使:

$$T(\mathbf{e}_i)=\lambda_i\mathbf{e}_i$$

的問題了。

(ii) 既然對一個線性映射滿足 $T(\mathbf{e}_i)=\lambda_i\mathbf{e}_i$ 的這種向量有這麼重要（它是二次式標準化的主角），我們不妨給它取個名字。稱 λ_i 爲固有值與 $\mathbf{e}_i$ 爲固有向量，並硏究它的性質及求法。走過了這橋，進入固有值理論的領域，同學們可自己嘗試接實驗本第 203 頁唸起，老師教不教是其次的了。