固有値問題

賴東昇

（轉載自「數學敎室」第四期）

在現行高中數學實驗教材中，有些題材是受到批評的，其中固有值問題（第四册第四章）便是被嚴厲指責的題材之一。（請參見文末作者追記與編輯部註語）

本文的目的是想藉這個機會來看看究竟它的難處在那裏？我們準備分爲三段來說明固有值在平面解析幾何上的用處。第一段首先解說固有值，固有向量的概念，第二段接著講二次式的標準化問題，第三段才回到有心圓錐曲線的標準式的討論。不過在唸本文之前倒是希望大家先溫習一下「線性映射」這個概念（第四册第一章），因爲這是最起碼的預備知識。

§1. 固有值、固有向量

一開始就下定義：

〔**定義**〕假設 $T: R^2 \to R^2$ 是平面上的線性映射。平面上的向量 $X \neq \mathbf{0}$ 如果滿足 $TX = \lambda X$，$\lambda \in R$，就叫做線性映射 T 的固有向量，λ 叫做 T 的固有值。

換句話說，線性映射 T 的固有向量 $X \neq \mathbf{0}$ 就是在 T 的變換下方向不變的向量；也可以說 TX 與 X 在同一線上；也可以說 TX 與 X 平行。

〔**註 1**〕這裡所說的同方向，就是說 X 與 λX 是同方向，事實上，當 $\lambda > 0$ 時，X 與 λX 確是同方向。但是當 $\lambda < 0$ 時，X 與 λX 之方向正好相反，不過我們仍然把它算做是同方向。

〔**註 2**〕當 X 爲線性映射 T 的固有向量的時候，X 的任何倍數，即係數積 αX $(\alpha \neq 0)$，也是 T 的固有向量，因爲

$$T(\alpha X) = \alpha TX = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X)$$

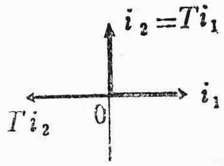
所以當 X 是 T 的固有向量時，在(經過原點)與 X 同一直線上的任何向量 αX $(\alpha \neq 0)$ 都是 T 的固有向量。因爲這個緣故，有人寧願採用「固有方向」這個名詞。

有了固有向量（或固有方向）的定義後，就不免連帶要問一些問題了（它們必然是有所爲而做的）。

〔**問題 1**〕：給一個線性映射 T，問 T 有沒有固有向量？

答案是不能「一概而論」，有些線性映射並沒有固有向量，有些則有。請大家看看下面的例子。

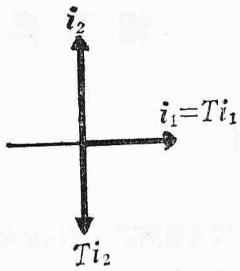
〔**例 1**〕（旋轉）設 T 是以原點爲心的 $90°$ 旋轉，它關於座標系〔$O; i_1, i_2$〕的自然表示式，及其方陣表示爲



$$Ti_1=i_2,\quad Ti_2=-i_1, \qquad [T]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

顯然的，所有的方向都做了 90° 的旋轉，所以T沒有固有向量。

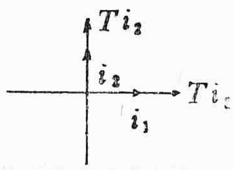
〔例 2〕（鏡射）設T爲以x軸爲鏡射軸的反射。它的自然表示式及其方陣表示爲



$$Ti_1=i_1,\quad Ti_2=-i_2, \qquad [T]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

顯然的，i_1與i_2都是T的固有向量，就是說X軸與Y軸是T的固有方向，至於其他方向都被T所變動，所以T的固有方向僅有兩個。

〔例 3〕（放射）設T爲將每一向量放大兩倍的映射，即 $TX=2X$，它的自然表示式及其方陣表示爲



$$Ti_1=2i_1,\quad Ti_2=2i_2, \qquad [T]=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

這時候，所有的方向都不變，所以任何向量$X\neq\mathbf{0}$都是T的固有向量。

有了以上的瞭解後，接著再提出一個問題:

〔問題 2〕: 已知線性映射T，如何去求得T的固有向量?

首先假設$X\neq\mathbf{0}$是T的固有向量，即

$$TX=\lambda X, \qquad \lambda\in R \quad \cdots\cdots(1)$$

當然X是未知量，不過在上式中，還有一個未知量λ。固有向量是未知的，它所對應的固有值也是未知的，依數學的常理，在問題中有兩個未知量的時候，總是先求得其中一個未知量，然後再進一步求另一個未知量。我們的作法是先求T的固有值λ，然後，才去求它所對應的固有向量X。

利用恒等映射 $I: R^2\to R^2, IX=X, X\in R^2$，可以把(1)改寫爲

$$(T-\lambda I)X=\mathbf{0} \quad \cdots\cdots(2)$$

（請注意: $T-\lambda I$ 是兩個線性映射T與λI之差，它仍然是一個線性映射！）(2)式表示線性映射$T-\lambda I$ 把一個非零向量X（即T之固有向量X）映到零向量去。所以 $T-\lambda I$ 不是對射! 因此它的行列式等於 0；即

$$\det(T-\lambda I)=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

把這個行列式展開來，便可得到一個λ的二次方程式。換句話說，線性映射T的固有值λ，必須滿足二次方程式(3)，所以只要解方程式(3)，若得二實根 λ_1,λ_2，它們便是T的固有值。如果(3)式有虛根，便表示T沒有固有值，也沒有固有向量。(3)式叫做T的特徵方程式。（特徵方程式(3)的係數全是實數，所以(3)式的二根同爲實根或同爲虛根）。

在求得固有值 λ_1, λ_2 之後，將它代入(2)式，這樣(2)式所代表的映射可轉化爲相依齊次聯立方程式，解這個相依方程式便可得固有向量。 #

以上的講法是所謂"沒有利用坐標系"(coordinate free)的講法。下面，我們將引進坐標系，把上面的討論再度呈現于大家面前，只有這樣做，才可以使大家有安全的"具體感"

現在在 R^2 上取定一組坐標系 $[O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2]$（即自然坐標系），假設向量$\boldsymbol{X}$在這個坐標系下的分量爲 (x, y)，即

$$\boldsymbol{X} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2$$

設線性映射T在這個坐標系下的自然表示式及其方陣表示爲

$$T\boldsymbol{i}_1 = \alpha\boldsymbol{i}_1 + \beta\boldsymbol{i}_2 \qquad\qquad [T] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$
$$T\boldsymbol{i}_2 = \gamma\boldsymbol{i}_1 + \delta\boldsymbol{i}_2 \quad ,$$

那麼上面的(2)，(3)式可分別化爲

$$\begin{cases} (\alpha-\lambda)x + \gamma y = 0 \\ \beta x + (\delta-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3')$$

或 $$\lambda^2 - (\alpha+\delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$$

〔說明〕(2)式的左邊爲

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)\boldsymbol{X} &= (T-\lambda I)(x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2) \\ &= T(x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2) - \lambda I(x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2) \\ &= xT\boldsymbol{i}_1 + yT\boldsymbol{i}_2 - \lambda xI\boldsymbol{i}_1 - \lambda yI\boldsymbol{i}_2 \\ &= x(\alpha\boldsymbol{i}_1 + \beta\boldsymbol{i}_2) + y(\gamma\boldsymbol{i}_1 + \delta\boldsymbol{i}_2) - \lambda x\boldsymbol{i}_1 - \lambda y\boldsymbol{i}_2 \\ &= [x(\alpha-\lambda) + y\gamma]\boldsymbol{i}_1 + [x\beta + y(\delta-\lambda)]\boldsymbol{i}_2\end{aligned}$$

因爲 $(T-\lambda I)\boldsymbol{X} = 0$，所以上式右邊的分量分別等于0，這樣就得到 (2)′ 式。

至於(3)式，因爲T, I 的自然方陣表示各爲

$$[T] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $T-\lambda I$ 的自然方陣表示爲

$$[T-\lambda I] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{pmatrix}$$

取其行列式，再令它爲0，便得(3)式。

現在，先回頭來看看前面所擧的三個例子。

〔例 1〕（旋轉）T的自然方陣表示爲

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore [T-\lambda I] = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

所以T的特徵方程式爲

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

此方程式沒有實根，所以T沒有固有向量。

〔例 2〕（鏡射）T的自然方陣表示爲

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \therefore [T-\lambda I] = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

所以T的特徵方程式為

$$\lambda^2-1=0$$

此程方式有二實根$\lambda=\pm1$，相應於$\lambda=1$的固有向量可由聯立方程式解出：

$$\begin{cases}0x+0y=0\\0x+2y=0\end{cases}$$

此方程式的解為$(x,y)=(t,0)$，所以固有向量是

$$\boldsymbol{X}=ti_1+0i_2=ti_1$$

同樣地，相應于$\lambda=-1$的固有向量也可由下列方程式解出

$$\begin{cases}2x+0y=0\\0x+0y=0\end{cases}$$

此方程式的解為$(x,y)=(0,t)$，所以固有向量是

$$\boldsymbol{X}=0i_1+ti_2=ti_2$$

〔例 3〕（放射）T的自然方陣表示為

$$[T]=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\quad\therefore[T-\lambda I]=\begin{pmatrix}2-\lambda&0\\0&2-\lambda\end{pmatrix}$$

所以T的特徵方程式為

$$(\lambda-2)^2=0$$

此方程式有重根$\lambda=2$，就是說T只有一個固有值$\lambda=2$。為了求得固有向量，先把方程式(2)′列出來看看：

$$\begin{cases}0x+0y=0\\0x+0y=0\end{cases}$$

結果是一個“無聊”的方程式，換句話說任意一對數(x,y)都是方程式(2)′的解，這表示任意一個向量$\boldsymbol{X}=xi_1+yi_2\neq0$都是$T$的固有向量。

以上的三例都是簡單的情形，我們再舉一例來說明，這個例子是在實驗本第四冊第四章（二次幾何Ⅲ）第三節（二次式的標準化）出現的論例4。在六十三年一月版裏有小小的印刷錯誤，在六十四年一月版裏已經把它改過來了。現在就將原來印錯的部份將錯就錯的算給大家看作為參考。

〔例 4〕設T為一線性映射，它的自然表示式及方陣表示分別為

$$\begin{matrix}Ti_1=3i_1-4i_2\\Ti_2=-4i_1-3i_2\end{matrix}\quad,\quad[T]=\begin{pmatrix}3&-4\\-4&-3\end{pmatrix}$$

因此得

$$[T-\lambda I]=\begin{pmatrix}3-\lambda&-4\\-4&-3-\lambda\end{pmatrix}$$

所以特徵方程式為

$$-(3-\lambda)(3+\lambda)-16=0$$

即　$$\lambda^2-25=0$$

故得T的固有值　$$\lambda=\pm5$$

當$\lambda=5$時，聯立方程式(2)′化為

$$\begin{cases}-2x-4y=0\\-4x-8y=0\end{cases}$$

即 $x+2y=0, \quad \therefore x=-2y$

所以解為

$$(x,y)=(-2t,t)$$

這樣我們找到了相應於固有值 $\lambda=5$ 的固有向量 $X=-2ti_1+ti_2$，其中單位長的固有向量為

$$X=(-2ti_1+ti_2)/\pm\sqrt{4t^2+t^2}=\pm\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}i_1+\frac{1}{\sqrt{5}}i_2\right)$$

當 $\lambda=-5$ 時，聯立方程式 (2)′ 化為

$$\begin{cases} 8x-4y=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases}$$

即 $2x-y=0, \quad \therefore y=2x$

所以解為 $(x,y)=(t,2t)$

於是得到相應於固有值 $\lambda=-5$ 的固有向量為 $X=ti_1+2ti_2$，其中具有單位長的固有向量為

$$X=(ti_1+2ti_2)/\pm\sqrt{t^2+4t^2}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}i_1+\frac{2}{\sqrt{5}}i_2\right)$$

§2. 二次式的標準化

二變數 x,y 的二次式一般為

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$

其中 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 是二次項部分，$2Dx+2Ey$ 是一次項部分，F是常數項部分。一個二次式如果沒有一次項及常數項部分，則稱為*齊次二次式*。下面為了討論的方便，只考慮齊次的二次式：

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

如果一個二次式不包含 xy 項，即如

$$Ax^2+Cy^2$$

之形狀，我們就把它叫做標準式。

利用矩陣的乘法，齊次二次式可寫成如下形式：

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=(x,y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

這個式子告訴我們：有了一個二次式，可以對應出一個方陣 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$（而且此方陣是對稱的！）；有了方陣也就可以聯想到線性映射了。假設T是以 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 為其自然方陣表示的線性映射，即

$$\begin{cases} Ti_1=Ai_1+Bi_2 \\ Ti_2=Bi_1+Ci_2 \end{cases}, \quad [T]=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

這樣經過了"由係數所決定的方陣"的媒介，從已知的二次式可得一個對稱的線性映射T（若一線性映射的方陣表示為對稱的方陣，我們就稱為對稱的線性映射。），借助這個線性映射，我們先把二次式表為二向量的內積如下：

補題：已知二次式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 由此式經過上述方法對應出來的線性映射以T表示，即 $$Ti_1=Ai_1+Bi_2$$

$$Ti_2=Bi_1+Ci_2$$

並令
$$\boldsymbol{X}=xi_1+yi_2$$
則
$$\boldsymbol{X}\cdot T\boldsymbol{X}=Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

〔證明〕其實證明並不難證，只是計算而已:

$$\begin{aligned}X\cdot TX&=(xi_1+yi_2)\cdot T(xi_1+yi_2)\\&=(xi_1+yi_2)\cdot[xTi_1+yTi_2]\\&=(xi_1+yi_2)\cdot[x(Ai_1+Bi_2)+y(Bi_1+Ci_2)]\\&=(xi_1+yi_2)\cdot[(xA+yB)i_1+(xB+yC)i_2]\\&=x(xA+yB)+y(xB+yC)\\&=Ax^2+2Bxy+Cy^2\qquad\#\end{aligned}$$

這個補題告訴我們，在自然坐標系〔$O;i_1,i_2$〕之下，內積$\boldsymbol{X}\cdot T\boldsymbol{X}$可表爲$Ax^2+2Bxy+Cy^2$
那麼在另一坐標系〔$O;e_1,e_2$〕之下，$\boldsymbol{X}\cdot T\boldsymbol{X}$ 將是什麼樣子呢?

例如 e_1,e_2 爲線性映射T的固有向量時，卽

$$\begin{cases}Te_1=\lambda_1e_1 & \lambda_1\in\boldsymbol{R}\\ Te_2=\lambda_2e_2 & \lambda_2\in\boldsymbol{R}\end{cases}$$

時，內積 $\boldsymbol{X}\cdot T\boldsymbol{X}$ 是可化爲比較簡單的形式，因爲在新坐標系〔$O;e_1,e_2$〕之下，假定$\boldsymbol{X}$的
爲（$\bar{x},\bar{y}$），卽

$$\boldsymbol{X}=\bar{x}e_1+\bar{y}e_2$$

那麼由直接計算可得

$$\begin{aligned}X\cdot TX&=(\bar{x}e_1+\bar{y}e_2)\cdot[T(\bar{x}e_1+\bar{y}e_2)]\\&=(\bar{x}e_1+\bar{y}e_2)\cdot[\bar{x}Te_1+\bar{y}Te_2]\\&=(\bar{x}e_1+\bar{y}e_2)\cdot[\bar{x}(\lambda_1e_1)+\bar{y}(\lambda_2e_2)]\\&=\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2\end{aligned}$$

換句話說：新坐標系的基底 e_1,e_2 爲T的固有向量時，$\boldsymbol{X}\cdot T\boldsymbol{X}$ 正好是標準的
沒有 xy 項)。

所謂齊次二次式的標準化問題就是指將已知的二次式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

中的變數（x,y）加以變換，使原式可改寫成標準式:

$$\bar{A}\bar{x}^2+\bar{C}\bar{y}^2$$

的問題，但是新變數（$\bar{x},\bar{y}$）與舊變數（x,y）之間必須保有線性關係:

$$\bar{x}=\alpha x+\beta y$$
$$\bar{y}=\gamma x+\delta y$$

假設向量$\boldsymbol{X}$在舊坐標系〔$O;i_1,i_2$〕之下的分量爲（x,y），在新坐標系〔$O;$
（$\bar{x},\bar{y}$），那麼（x,y）與（$\bar{x},\bar{y}$）之間有線性關係，就等於說（i_1,i_2）與（
係，或者說 e_1,e_2 是由 i_1,i_2 經過一個線性映射可得到的。

由以上的討論，我們可以做總結如下：將二次式 $Ax^2+2Bxy+Cy$
話，就不用再費神去標準化了）化爲標準式 $\bar{A}\bar{x}^2+\bar{C}\bar{y}^2$ 的步驟爲

(1)首先考慮一個對稱的線性映射T:

$$[T]=\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{aligned}Ti_1&=Ai_1+Bi_2\\Ti_2&=Bi_1+Ci_2\end{aligned}$$

⑵其次再求T的固有值，即解特徵方程式：

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}=0$$

得其根爲 λ_1, λ_2

⑶則　$Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 可化爲　$\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2$

不過，這裏尙留下了一些疑問，第一是T有沒有固有值，有沒有固有向量？第二是假使T有二個固有向量 e_1, e_2 它們是否可組成一坐標系〔$O; e_1, e_2$〕，或者，講得簡單一點就是 e_1, e_2 是否互相垂直？對於這些問題，我們分別在下列二命題中答覆。

命題1：任意對稱線性映射的固有值恒爲實數。

〔證明〕設對稱線性映射T的方陣表示爲

$$[T]=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

則其特徵方程式爲　$\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0$

這方程式的判別式爲　$(A+C)^2-4(AC-B^2)=(A-C)^2+4B^2$

因爲由假設$B\neq 0$，這判別式恒爲正，所以特徵方程式有相異二實根。

命題2：對於任意對稱線性映射，相應於相異固有值的固有向量互相垂直。

〔證明〕設對稱線性映射T的方陣表示爲

$$[T]=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

其相異固有值爲 λ_1, λ_2，相應之固有向量分別以 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 表示，那麼

$$(T\boldsymbol{X}_1)\cdot\boldsymbol{X}_2=(\lambda_1\boldsymbol{X}_1)\cdot\boldsymbol{X}_2=\lambda_1(\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2) \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\boldsymbol{X}_1\cdot(T\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{X}_1(\lambda_2\boldsymbol{X}_2)=\lambda_2(\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2) \quad\cdots\cdots(2)$$

但是另一方面，如令

$$\boldsymbol{X}_1=x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2$$
$$\boldsymbol{X}_2=\bar{x}\boldsymbol{i}_1+\bar{y}\boldsymbol{i}_2$$

則

$$\begin{aligned}(T\boldsymbol{X}_1)\cdot\boldsymbol{X}_2 &=T(x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2)\cdot(\bar{x}\boldsymbol{i}_1+\bar{y}\boldsymbol{i}_2)\\ &=[x(A\boldsymbol{i}_1+B\boldsymbol{i}_2)+y(B\boldsymbol{i}_1+C\boldsymbol{i}_2)]\cdot(\bar{x}\boldsymbol{i}_1+\bar{y}\boldsymbol{i}_2)\\ &=[(xA+yB)\boldsymbol{i}_1+(xB+yC)\boldsymbol{i}_2]\cdot(\bar{x}\boldsymbol{i}_1+\bar{y}\boldsymbol{i}_2)\\ &=Ax\bar{x}+B(\bar{x}y+x\bar{y})+Cy\bar{y}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1\cdot(T\boldsymbol{X}_2) &=(x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2)\cdot T(\bar{x}\boldsymbol{i}_1+\bar{y}\boldsymbol{i}_2)\\ &=(x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2)\cdot[\bar{x}(A\boldsymbol{i}_1+B\boldsymbol{i}_2)+\bar{y}(B\boldsymbol{i}_1+C\boldsymbol{i}_2)]\\ &=(x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2)\cdot[(\bar{x}A+\bar{y}B)\boldsymbol{i}_1+(\bar{x}B+\bar{y}C)\boldsymbol{i}_2]\\ &=Ax\bar{x}+B(x\bar{y}+\bar{x}y)+Cy\bar{y}\end{aligned}$$

故得

$$\boldsymbol{X}_1\cdot(T\boldsymbol{X}_2)=(T\boldsymbol{X}_1)\cdot\boldsymbol{X}_2$$

利用上面的二式⑴與⑵可得

$$\lambda_1(\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2)=\lambda_2(\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2)$$

因爲 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故得 $\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2=0$，即 $\boldsymbol{X}_1$ 與 $\boldsymbol{X}_2$ 是垂直的。

〔例 4〕(此例仍是接§1的例4而來的，其實是同一例子)將二次式 $3x^2-8xy-3y^2$ 化爲標準式。

解：對應於這二次式的對稱方陣〔T〕爲

$$[T]=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

它的特徵方程式爲

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

或爲 $$\lambda^2-25=0$$

故得 $$\lambda=\pm 5$$

當取 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=-5$ 時，所得之標準式爲

$$5\bar{x}^2-5\bar{y}^2$$

當取 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=5$ 時，所得之標準式爲

$$-5\bar{x}^2+5\bar{y}^2$$

所以將 $3x^2-8xy-3y^2$ 化爲標準式則可得 $5x^2-5y^2$ 或爲 $-5x^2+5y^2$。這兩個答案都對的，它們之間的差仍是由於兩個固有值之前後次序不同而來的。

§3. 有心二次曲線

二次曲線中有橢圓，雙曲線，拋物線，其中橢圓及雙曲線又稱爲有心二次曲線。二次曲線的一般式爲

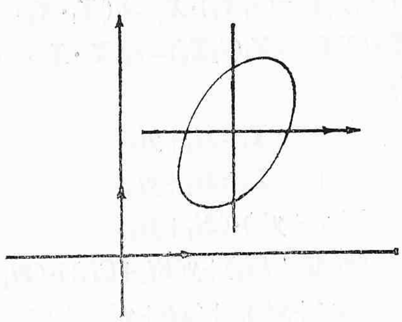
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

其中它爲有心二次曲線之條件是大家所熟習的

$$B^2-AC\neq 0$$

如果我們將坐標軸平移一下，把原點放在曲線的中心，曲線之方程式可化簡爲

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



如果再施行轉軸，方程式(1)可更進一步簡化爲

$$Ax^2+Cy^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

這就是有心二次曲線的標準式。從標準式我們可以馬上驗出它是橢圓，或者是雙曲線，而且長軸短軸也馬上可以知道。因爲有這些方便，在平面解析幾何裏，求二次曲線的標準式就變成一件要緊的事情。但是從上面的討論知道，求二次曲線的標準式，其實就是二次式的標準化問題。這就是爲什麼我們在高中數學實驗教材裏引進了固有值問題的道理。

例：將 $3x^2-8xy-3y^2=1$ 化爲標準式，並求標準化過程中，新舊坐標系之間的關係。

(I) 因爲

$$3x^2-8xy-3y^2=(x,y)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

相應於二次式 $3x^2-8xy-3y^2$ 的線性映射 T 爲

$$\begin{aligned} Ti_1&=3i_1-4i_2 \\ Ti_2&=-4i_1-3i_2 \end{aligned}, \quad [T]=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

T的特徵方程式爲

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即 $$\lambda^2-25=0$$

所以T的固有值爲 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-5$

因此，該曲線的標準式爲

$$5x^2-5y^2=1$$

(II) 爲了求新坐標系的基底 e_1, e_2，先解聯立方程式

$$\begin{cases} (3-\lambda)x-4y=0 \\ -4x-(3+\lambda)y=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

當 $\lambda_1=5$ 時，得

$$\begin{cases} -2x-4y=0 \\ -4x-8y=0 \end{cases}$$

故得 $x=-2y$，所以固有向量爲 $X=-2ti_1+ti_2$，取單位向量則得

$$e_1=\frac{2}{\sqrt{5}}i_1-\frac{1}{\sqrt{5}}i_2 \quad \text{或} \quad e_1=\frac{-2}{\sqrt{5}}i_1+\frac{1}{\sqrt{5}}i_2$$

當 $\lambda_2=-5$ 時，聯立方程式(1)化爲

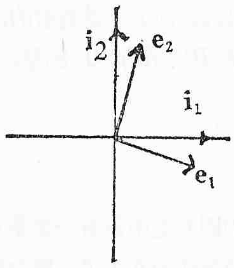
$$\begin{cases} 8x-4y=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases}$$

故得 $y=2x$，所以固有向量爲 $X=ti_1+2ti_2$ 取單位向量，則得

$$e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}i_1+\frac{2}{\sqrt{5}}i_2 \quad \text{或} \quad e_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}i_1-\frac{2}{\sqrt{5}}i_2$$

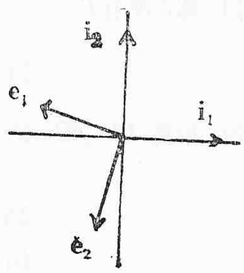
我們取坐標軸時，須注意其是否右手系，爲了保持右手系，新坐標軸 e_1, e_2 之取法應爲

$$\begin{cases} e_1=\frac{2}{\sqrt{5}}i_1-\frac{1}{\sqrt{5}}i_2 \\ e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}i_1+\frac{2}{\sqrt{5}}i_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



或爲

$$\begin{cases} e_1=\frac{-2}{\sqrt{5}}i_1+\frac{1}{\sqrt{5}}i_2 \\ e_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}i_1-\frac{2}{\sqrt{5}}i_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$



(III) 新坐標 $(\bar{x}, \bar{y})$ 與舊坐標 (x, y) 之間的關係：

設點P在舊坐標系〔$O; i_1, i_2$〕下之坐標爲 (x, y)，在新坐標系〔$O; e_1, e_2$〕下之坐標爲 $(\bar{x}, \bar{y})$，那麼向量 $\overrightarrow{OP}$ 可分別表示爲 i_1, i_2 及 e_1, e_2 之線性組合：

$$\overrightarrow{OP}=xi_1+yi_2$$
$$=\bar{x}e_1+\bar{y}e_2$$

利用(2)式，後者可化爲

$$\bar{x}e_1+\bar{y}e_2=\bar{x}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}i_1-\frac{1}{\sqrt{5}}i_2\right)+\bar{y}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}i_1+\frac{2}{\sqrt{5}}i_2\right)$$
$$=\left(\bar{x}\frac{2}{\sqrt{5}}+\bar{y}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)i_1+\left(-\bar{x}\frac{1}{\sqrt{5}}+\bar{y}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)i_2$$

故得

$$xi_1+yi_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}\right)i_1+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}\right)i_2$$

因爲 i_1,i_2 爲基底，所以相應係數相等：即

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{x}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{y} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{y} \end{cases}$$

這就是點P的新舊坐標之間的關係式。

如果利用(3)式，取新基底（即新坐標軸），同理可得新舊坐標之間的關係式爲

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{x}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{y} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}. \end{cases}$$

在上面，我們只討論了有心二次錐線

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\,,\ B^2-AC\neq 0$$

的標準化問題，這是由於受到判別式 $B^2-AC\neq 0$ 的限制緣故。當 $B^2-AC=0$ 時，線性映射T是特異的，即T不是對射的，現在我們來仔細地看看這個特異的情形。

如果 $B^2-AC=0$ 的話，T的特徵方程式

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}=0$$

便化爲

$$\lambda^2-(A+C)\lambda=0$$

所以T的固有值中便有一個是0，即 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=A+C$. 這時候，對應於固有值 $\lambda=0$ 的固有向量就統統映到**0**去了。換句話說，在線性映射T之下，有些非零向量會映到零向量去，所以T就不是對射了。這種線性映射通常叫做特異的。

例如　線性映射T

$$[T]=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{matrix} Ti_1=i_1+2i_2 \\ Ti_2=2i_1+4i_2 \end{matrix}$$

是特異的，因爲 $B^2-AC=2^2-1\cdot4=0$，T的固有值爲 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$。它們所相應的固有向量分別爲

$$2ti_1-ti_2 \qquad (\lambda_1=0\text{ 的固有向量})$$
$$ti_1+2ti_2 \qquad (\lambda_2=5\text{ 的固有向量})$$

其中，每一形如 $2ti_1-ti_2$ ($t\in R$) 的向量，均在T之下映到**0**去。至於平面上其他點 (x,y)，則都映到直線 $2x-y=0$ 上去了。因爲

$$T(xi_1+yi_2)=xT(i_1)+yT(i_2)$$

$$=x(i_1+2i_2)+y(2i_1+4i_2)$$
$$=(x+2y)i_1+2(x+2y)i_2$$

所以T不是對射，這樣我們看清楚了下述三個條件是等價的：

i) 線性映射T是特異的。

ii) 線性映射T的行列式等於0。

iii) 線性映射T有一固有值爲0。

追　　記

以上，簡單的介紹了固有值、固有向量以及它們在幾何上的應用，卽二次錐線的分類問題。此外，固有值、固有向量在微分方程、泛函分析，以及數學其他領域中亦有重要的應用，**可以說，它們是貫穿數學各部門的一大支柱**。這樣一個涉及範圍極爲廣泛的基本概念有沒有必要在高中講授呢？有人贊成，也有人反對，這是目前大家討論的有趣問題之一。

〔編者按〕

本文作者現任敎於臺灣大學數學系。民國64年1月底作者曾在臺大數學系高中數學實驗敎材研討會中講述「固有值問題」，本文卽將該一講稿部份再加改寫而成。該稿曾於「數學敎室」第四期登載。

在敎育部委託編寫實驗敎材計劃執行四年後的今天，我們重新檢討實驗敎材的構想章節，對於卽將進行的高中數學課程標準修訂，頗具意義。本刊登出實驗敎材中這段引起熱烈爭議的內容，希望得到更多、更廣的反應，以影響課程標準修訂的方向。