

給學弟的一封信

魏慶榮

本文作者現任教於臺大數學系，這是他八月中出國進修之前留給我們的一份禮物。他以親歷的感受寫下這封信，文句平淡而樸實，却道出了當前大、中學數教育的最大危機，讀者或能從文中體會到作者用心之誠。

事實上，在百忙之中作者又為讀者們譯好了 Rényi 的一篇 Socrates 與 Hippocrates 有趣的對話錄，限於篇幅，延在下期登出。

一年來作者不斷為本刊貢獻很多心力，他所做的遠遠超過他所被看到的。對於這些，我們深致謝意。

——編者按

厚紀：

接到你的來信，了解了你對數學的困惑，感到非常同情。你說，對「公設一定義一定理」這樣一系列陳述下去的數學，覺得非常乏味，因為常常不知道這些定義、定理來自何方，又將到何處，讀數學所懂得的，只是在「這一步能不能推到下一步」的邏輯推演中鬪口角。這種苦惱，過去我們班上的同學也曾碰過，也因此很多同學到了四年級，整天不是拱豬就是下棋、打橋牌，熄了燈還搬桌子到走廊上，偷壁燈夜戰，惹得教官很不放心。那時，最流行的一句話——Laplace 快死時說：「一切數學都是假的，只有愛情才是真的」。

這股流風不僅在當時增強了校園內所謂「虛無」、「失落」的時髦病，而且到了今天在數學的教學上已經起了很大的壞作用。我聽過，有我們的學長，口口聲聲說是要加強學生的新觀念，因此認為要教大學生 Banach 代數，可是一點也沒提到引進函數空間的理由；我也聽過，有些師專的老師，認為必須讓學生趕上時代，因此解析幾何可以不教，集合論卻不能不上；我還聽說過，有些高中老師在數的交換性和結合性上大做文章，教得高一的學生糊裏糊塗，弄不清楚為什麼本來對他那麼親近的東西，一下子變得那麼陌生和遙遠了。這些在我對自己的學習歷程做一番回顧後發現都是由於受到「公設一定義一定理」這股流風的影響，對數學產生了歪曲的看法才造成的。

我也捲進這股風暴中好久。記得大三那年，有位牌打得很好的同學，很懇切的問我：「數學有什麼好呢？」我說，「數學真有意思啊，就像下棋一樣，從很少的定義，公設，藉着一些規則，它就能導出那麼多美麗的定理來。它在結構上的美麗，就像一幅畫一樣啊！」可是他又說：「我看不出有什麼美，只覺沒趣，你能不能多說一點？如果能說得我心服，我就不再打牌了。」我是很有熱忱勸他「改邪歸正」，可是當時我怔住了，我能再說些什麼呢？極端一些，像柏拉圖一樣，拿些錢給他，說這個最有意義？還是吹噓一下老套：「數學是科學的女皇」？可是有些別系的同學拿數學來問我時，通常我只能回答：「對不起，我還沒學到。」繁雜的計算不會或許還說得過去，可是別人要求解釋一些式子的意義時，能夠說，「喔，這是定理」就敷衍了事了嗎？

這些困擾的問題，激起我去探尋數學課程內容的來龍去脈，當時所能問得到的答案有兩種。第一種認為只有大師才知道。對於正在發展中的數學，也許可以這麼說，可是像微積分，高等代數這類早有上百年歷史的科目，難道也只有那少數幾個大師才懂得？這種「唯大師論」，那時曾

8 數學傳播〔論述類〕

經使我沮喪過一陣子。第二種認為大學學的數學都是些基礎，用意不過是在訓練數學的推理方式，進一步的瞭解須要讀更多的書。這種講法，當時確實對於自己不滿「公設一定義一定理」的想法，曾起過一陣子的撫慰作用。但是現在想來，卻覺得和「唯大師論」一樣，阻礙了對數學的認識，助長了那股流風的聲勢。是的，大學學的是比較基礎的東西，但這只是相對於現代做研究工作的人來說是對的。至於那些東西對高斯、尤拉來說，可已經是相當尖端而有實質的東西——不但對數學本身的問題，有了一定程度的答覆，而且對應的也解釋了不少實際問題。例如在初微裏學到的導數，在歷史上是由於研究速度、距離之間的關係所引發，經過進一步的探討，發現速度和決定函數曲線進行方向的斜率，有了相同的數學內涵，最後才歸納出導數能用來解釋一切變化率的問題。像對導數的這種認識，並不是公設化的演繹方式，以及邏輯推理所能包含的。要是不知道這些，而一味堅持「推理方式」，就莫怪乎那些不再或沒機會讀研究所的學生，感到數學不過是一堆名詞，以及由這堆名詞疊起來的一副空架子而已。當然，在這種狀況下，讓他去教數學，他怎能不教「公設一定義一定理」，而自誤誤人呢？

我在讀研究所時，還聽到一種論調，認為一個數學式子可能的解釋既然是那麼多，為了避免給人先入為主和以偏概全的毛病，最好的方法就是不加註解。持這種論調的人，可能他是很有學問的人，知道許多註解，可是對當時「入門」的我，卻是一個也不懂得，空說「有許多註解」又怎能教人心服？現在仔細想來，這種論調一方面忽略了創造數學的動機，例如要是不講弦振盪引起的積分算子問題，誰會懂得希氏空間論裏頭譜分析在談些什麼？誰又知道它會往那個方向走？另一方面，這種論調使人抓不住理論的想法，例如要是對 Jacobian 不加註解，或者只說是導數的一種推廣，一點也不提是面積（測度）局部的變化率，誰又怎會曉得在變數變換後，積分一定要乘上個 Jacobian 呢？碰到人家問起，不說「定理保證如此」，又能說些什麼？

現在我常想，那些認定數學是「公設一定義一定理」的人，大概是墜入「數學即下棋」的想法裏，認為由某些公設開始，藉着邏輯推演，便能發展出一套理論來。也因此他們常躲在「將來可能有用」的擋箭牌後面，怕人家問「有什麼用？」。可是，要是我們去翻翻數學發展的歷史，會發現他們的想法跟怕問的態度，都不是我們應該學習的。是的，數學史上的確存在着理論先於實用的例子，但是，仔細的考察會發現這些理論都是用來推廣或是解釋數學本身已產生的問題，而這些問題的根源卻是實際問題——在十九世紀以前，一直是由物理而來，到現在卻是來自人文跟自然科學。因此拿「數學是科學的工具」的眼光來看，這些理論無非是在解說，已有工具可能的改進以及可能的適用範圍。況且，進一步的考察又可以發現，這些理論到後來能夠有進一步的發展，完全是受到實際問題的刺激，例如廣義相對論之於微分幾何；量子力學之於特殊函數論和希氏空間算子論。有了這些認識，人家問起「有什麼用？」的問題時，縱使談不上「實用」，也可以談談「理論之用」吧？而且，從這些探討我們也容易瞭解，由於理論本身的擴大，因而需要一個更有系統和更鞏固的基礎，而公設便是由理論提供的實際資料中分析挑選出來的，一面用來綜合已有的理論資料，一面用來作為邏輯推演這套理論的基礎，但卻不是理論的出發點。因為要是沒有理論，我們去跟什麼建立基礎呢？所以數學那裏像下棋呢？

講得這麼多，我也逐漸覺得心虛；畢竟，所談的數學已超過我所完全瞭解的範圍了，但是每次我在學習中有所心得時，總是印證了上面的觀點。而且，想起以前「迷信難書」的學習態度，總有點黯然神傷，要是那時有人告訴我這些，該是多好。所以收到你的信，發現你有了相同的苦痛，不禁就寫下這麼多，也許有些地方還講得不够完善，有些地方和你的學習經驗互相衝突，希望你能來信批評和討論，更希望你能和幾位同學組合起來，一起研究，一起向師長們請教。