三角形面積平分線探討

鄭再添

一、問題敘述

已知一三角形△ABC 及一點P，試過P點作直線將△ABC 面積平分為二。

二、前　言

過三角形形上一點作面積等分線並不困難，常被中學教師列為補充教材講述。筆者不揣淺陋，曾在"科學研習"月刊(國立台灣科學教育館出版，以國中生為對象)第廿三卷第一期中發表"三角形面積等分線"一文作簡單介紹。若考慮對形內點作圖，則情況將複雜許多。事實上，它的答案已非唯一。本文由直觀地作圖觀察着手，試圖對三角形的面積平分線個數問題作探討，並提出一個一般性的作圖法，能適用於形上、形內、以至形外各點，將整個"三角形面積平分線"問題徹底解決。尚乞方家給予斧正。

三、內文大綱

(甲)過△邊上點作面積平分線法。

(乙)(一)、(二)讓P沿△邊上點作面積等分線，實際操作觀察。

(三)以座標幾何驗證。

(四)過△內部點作面積平分線的作法。

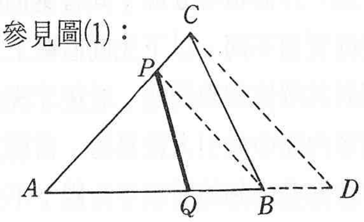
(丙)過△外部點的作法。

四、本　文

(甲)P在△ABC 上

為了利用形上點的面積平分線的簡單作圖法將所有面積平分線畫出，以便於觀察，在此先將其作法贅述如下：

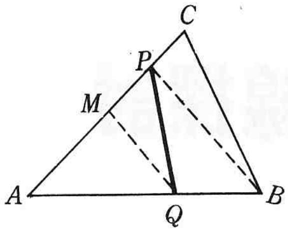
<作法一>參見圖(1)：



圖(1)

連$\overline{PB}$，過C作$\overrightarrow{CD} /\!/ \overline{PB}$與$\overrightarrow{AB}$交於$D$；取$\overline{AD}$中點$Q$，連$\overline{PQ}$，則$\overline{PQ}$平分$\triangle ABC$。

<作法二>參見圖(2)：



圖(2)

連$\overline{PB}$，取$\overline{AC}$中點M，過M作$\overline{MQ} /\!/ \overline{PB}$與$\overline{AB}$交於$Q$，連$\overline{PQ}$，則$\overline{PQ}$平分$\triangle ABC$。

討論：

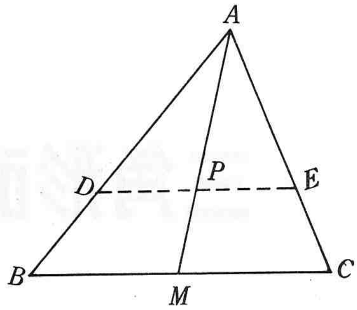
1. 在一中，若P較靠近A點（即$\overline{PA} > \overline{PC}$），則應改作「過$A$作$\overrightarrow{AD} /\!/ \overline{PB}$與$\overrightarrow{CB}$交於$D$，取$\overline{CD}$中點$Q$」，否則$Q$將落在形外，$\overline{PQ}$即無法平分$\triangle ABC$。
2. 在二中，只要選取P點所在邊的中點作圖即可，不必顧慮其他，且適用於特殊情形（P爲頂點或邊的中點時）。故作法二優於作法一。
3. 對形上任意點P，顯然恰有一條面積平分線通過它。上述兩種作法的結果必然相同。

也許還有其他不同的作法，但筆者相信，上述作法二可稱是最精簡的了，下面的圖大都以此法作出。

(乙)P在$\triangle ABC$內

過P作面積平分線，其答案個數隨P點的所在位置而不同。以下先就直觀上分析，再深入探討其解答個數問題，最後才提出它的作法:

(一)形內點中最引人注目的，當屬重心。因爲三中線都是已知的面積平分線，不免讓人想入非非：“是否過重心的直線都是面積平分線？”當然，這個猜測是錯的，我們很容易可由圖(3)看出眞象──過重心P作$\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$，



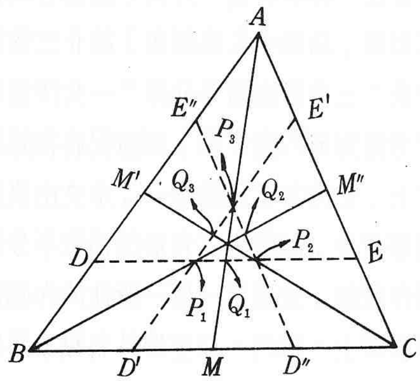
圖(3)

$\because \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AP} : \overline{AM} = 2 : 3$

$\therefore \triangle ADE : \triangle ABC = \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = 4 : 9$

故$\overline{DE}$過重心P但未平分$\triangle ABC$。

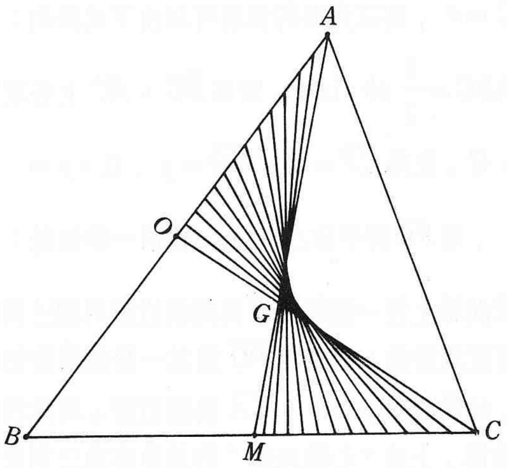
上面的例子引出一點聯想，値得在此提提──若在$\overline{AB}$邊上取$\overline{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}$，過$D$作$\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$（與$\overline{AC}$交於$E$），則$\triangle ADE : \triangle ABC = \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 2$，可得面積平分線$\overline{DE}$。同法對三邊作圖，發現$P_1$、$P_2$、$P_3$三點作面積平分線至少有三個答案（參見圖(4)）$\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$、$\overline{D'E'} /\!/ \overline{AB}$、$\overline{D''E''} /\!/ \overline{AC}$；且$\overline{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}$，$\overline{CD'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC}$，$\overline{BD''} =$



圖(4)

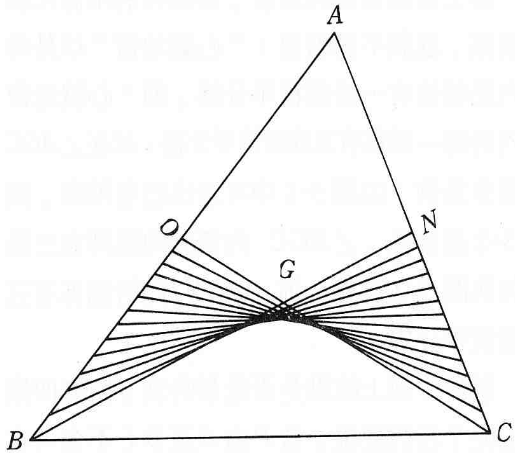
$\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC}$ ）。這不免又讓人懷疑：是否對某些形內點而言，可以有許多（甚至無限多）面積平分線通過它？

㈡為了瞭解事實眞象，筆者採用“釜底抽薪”的根本辦法：沿著三角形三邊上取細分點，按㈠之作法一一作圖加以觀察。如此可對所有的面積平分線作全盤掌握，它們似乎是作一有“規則”的變換：如圖 5-1 所示，當 P 點自 A

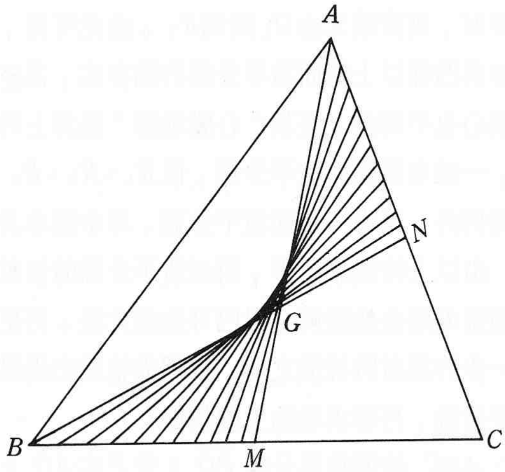


圖(5-1)

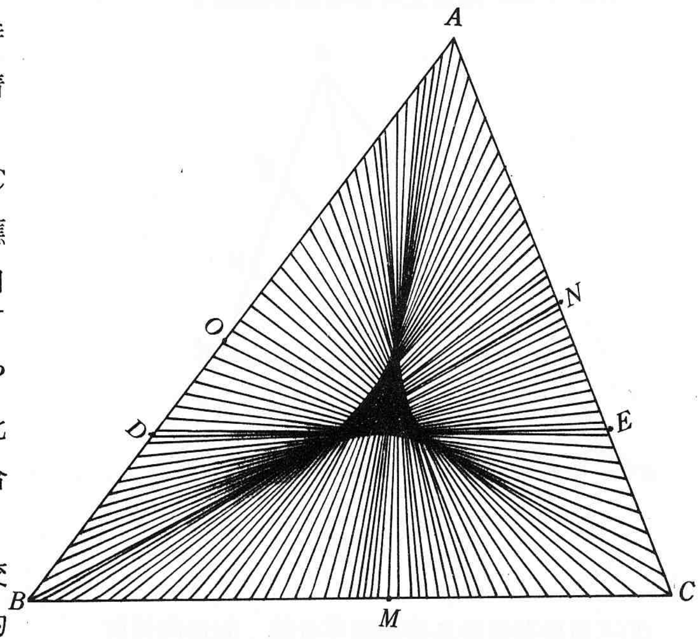
往 B 方向移動，則面積平分線 $\overline{PQ}$ 自中線 $\overline{AM}$ 處沿著某未知曲線作“邊旋轉邊滑落”運動；當 P 到達 O 點時，$\overline{PQ}$ 即成中線 $\overline{CO}$（觀察時，不妨手執直尺模擬 $\overline{PQ}$ 變動，可以看得更清楚）。顯然，在△AGO 及△CGM 中的點，此時恰有一條面積平分線通過它；但在∠AGC 內部，則交織成一小塊網狀區域，當中的點應有兩條面積平分線通過。圖 5-2 所示則爲 P 自 O 再向 B 處移動，結果類似前者，$\overline{PQ}$ 自 $\overline{CO}$ 對△ABC “掃描”至 $\overline{BN}$ 處。圖 5-3 中，P 再由 B 向 M 處移動，則 $\overline{PQ}$ 又回到 $\overline{AM}$，至此已將所有面積平分線畫出。若將以上三圖疊合在一起，則形成如圖 5-4 所展現的美妙圖案；面積平分線覆蓋了整個三角形，而中央部分交織成一個網狀的“心臟地帶”，以三條未知的曲線爲邊界。



圖(5-2)



圖(5-3)



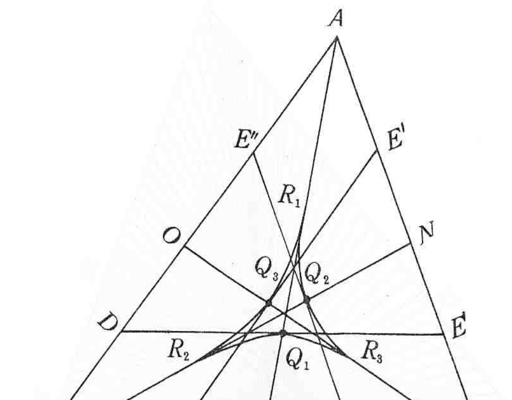
圖(5-4)

由上面四個圖的解析，如果再利用直尺輔助觀察，應該不難看出："心臟地帶"以外的形內點都恰有一條面積平分線，而"心臟地帶"內的點一般都有三條面積平分線。以在$\angle AGC$內部分為例：由圖 5-1 中可看出已有兩條，與圖 5-2 疊合後，$\angle NGC$ 內部分的點即有三條；再與圖 5-3 重疊，則$\angle AGN$ 內的點亦有三條面積平分線。

至於中線上的點是否比較特別，將有四條以上呢？我們發現，當P由A至D（不含A在內），則$\overline{PQ}$與中線$\overline{AM}$的交點由R_1至Q_1（參考圖(6)，其中$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$）；若$P$再由$D$經$B$至$M$，則交點又由$Q_1$回到$R_1$。由此可見，並無具四條以上的面積平分線的點存在，甚至連重心也不例外。至於"心臟地帶"邊界上的點，一般有兩條面積平分線，但R_1、R_2、R_3三點例外，只有一條面積平分線，即中線本身。

由以上的觀察所得，對面積平分線的個數問題雖未臻全然瞭解，但已可知個大概。再更進一步的探討與推演之前，我們先整理出幾點初步結論，再尋求理論上的根據：

(1)$\triangle ABC$ 的面積平分線$\overline{PQ}$；若P在$\overline{AO}$上，則Q點將落在$\overline{CM}$上；若P在$\overline{BO}$上，則Q點在$\overline{NC}$上（參見圖 5-1 及 5-2）。P在$\overline{AC}$、$\overline{BC}$兩邊上時亦有類似結論。



圖(6)

(2)三角形有無限多條面積平分線，對形內任何一點，也都有面積平分線通過它。

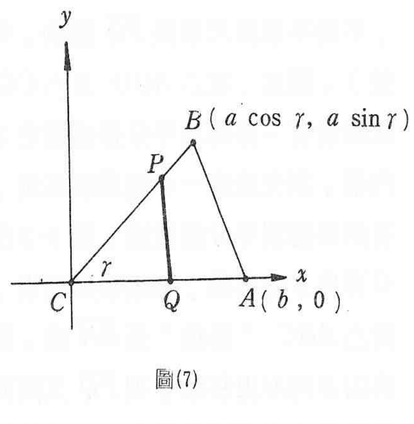
(3)除了中央"心臟地帶"外的形內點，都恰有一條面積平分線。

(4)"心臟地帶"區域以三條曲線為邊界；曲線兩兩相交於中線上。

(5)"心臟地帶"內的點，都具三條面積平分線；邊界上的點，則除了圖(6)所示之R_1、R_2、R_3三點具一條面積平分線外，其他都具兩條面積平分線。

(三)設$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$，$\angle C=r$，則三角形的面積可以由下式表出：$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin r$。若在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上各取$P$、$Q$，使得$\overline{CP}=x$、$\overline{CQ}=y$，且$xy=\frac{ab}{2}$，則$\overline{PQ}$將平分$\triangle ABC$。聯到一個知識：過雙曲線上任一點的切線與兩漸近線所圍三角形面積為定值。故猜測$\overline{PQ}$為某一雙曲線的切線，此雙曲線以$\overline{CB}$、$\overline{CA}$為漸近線。因此我們推測，上述"心臟地帶"的邊界應為三則雙曲線其一支的部分圖形所構成，而分別以三內角平分線為對稱軸。證明如下：

(1)將$\triangle ABC$ 如圖(7)置於坐標系上，$\angle C=r$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，利用參數t作討論



圖(7)

，其中$\overline{PQ}$為$\triangle ABC$ 的面積平分線——由(二)中之結論(1)知，若取$\frac{1}{2}\leq t\leq 1$，P點坐（$at\cos r$，$at\sin r$），則Q之坐標為（

$\frac{b}{2t}$, 0) ;

則 $\overline{PQ}$ 方程式為

$$\frac{at\sin r}{at\cos r-\frac{b}{2t}}=\frac{y}{x-\frac{b}{2t}}$$

$(2at^2\sin r)x-(2at^2\cos r-b)y$

$-abt\sin r=0$ ……………………………①

若考慮微差 $\triangle t$,設 p' 為對應於 $\triangle t+t$ 的點,則面積平分線 $\overline{P'Q'}$ 的方程式為

$[2a(t+\triangle t)^2\sin r]x-[2a(t+\triangle t)^2\cos r-b]y-ab(t+\triangle t)\sin r=0$ ……………………②

將①、②兩式聯立,求得 $\overline{PQ}$ 及 $\overline{P'Q'}$ 之交點坐標為:

$$\begin{cases} x=at\cos r-\dfrac{2at^2\cos r-b}{4t+2\triangle t} \\ y=at\sin r-\dfrac{at^2\sin r}{2t+\triangle t} \end{cases}$$

當 $\triangle t\to 0$ 時,則成

$$\begin{cases} x=\dfrac{2at^2\cos r+b}{4t} & \cdots\cdots③ \\ y=\dfrac{at\sin r}{2} & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

再設法消去 t ,由④式 $t=\dfrac{2y}{a\sin r}$

代入③得

$$x=\frac{2a(\frac{2y}{a\sin r})^2\cos r+b}{4(\frac{2y}{a\sin r})}$$

經化簡整理後成

$8xy-(8\cot r)y^2-ab\sin r=0$

由二次曲線判別法可證實確為一雙曲線。若改成如下形式:

$$y[x-(\cot r)y]=\frac{ab}{8}\sin r ,$$

則可得兩漸近線 $y=0$ 及 $x-(\cot r)y=0$ (即 $y=\tan r\,x$),正是 $\angle C$ 的兩邊 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$!

一切結果雖本在預料中,卻也夠令人振奮的。再仔細檢視,又有了意外發現:

$$\overline{PQ}\text{ 的中點坐標}\begin{cases} x=\dfrac{2at^2\cos r+b}{4t} \\ y=\dfrac{at\sin r}{2} \end{cases}$$

與上式③、④完全相同。這個發現的意義非凡,它導致一個嶄新的觀點:

『心臟地帶的邊界就是所有面積平分線的中點所成的軌跡』換句話說,心臟地帶是由所有面積平分線的中點所圍成的區域。

(2)上面所得的雙曲線方程式須經旋轉變換才能現出"標準形式"來,總覺不盡滿意。因此,再改由角平分線(貫軸)為 x 軸來處理。以下推演採包絡線解法,由參數 t 的直線族方程式及它的微分所得的方程式聯立來解(參見〔4〕),而導出雙曲線的標準式:

參見圖(8),設 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\frac{1}{2}\angle C=\theta$, $\overline{PQ}$ 為 $\triangle ABC$ 面積平分線,

則 $A(b\cos\theta,-b\sin\theta)$,
$B(a\cos\theta, a\sin\theta)$

若 $P(ta\cos\theta, ta\sin\theta)$, $\frac{1}{2}\le t\le 1$,

則 $Q(\frac{b}{2t}\cos\theta , -\frac{b}{2t}\sin\theta)$

由兩點式求 $\overline{PQ}$,

$$\frac{ta\sin\theta+\frac{b}{2t}\sin\theta}{ta\cos\theta-\frac{b}{2t}\cos\theta}=\frac{y-ta\sin\theta}{x-ta\cos\theta}$$

$\Rightarrow[(2t^2a+b)\tan\theta]x-(2t^2a-b)y$
$-2abt\sin\theta=0$ ……………………⑤

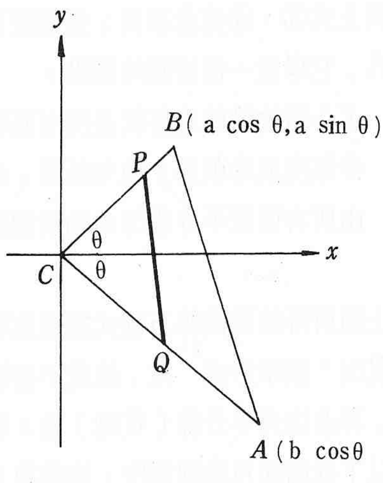
對 t 微分得

$(4ta\tan\theta)x-4tay-2ab\sin\theta=0$
……………………⑥

聯立解之則有

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t^2a+b}{4t}\cos\theta & \cdots\cdots\cdots\cdots⑦ \\ y = \dfrac{2t^2a-b}{4t}\sin\theta & \cdots\cdots\cdots\cdots⑧ \end{cases}$$

⑦、⑧兩式即直線族（面積平分線）的包絡線的參數形式。



圖(8)

消去參數：

$$(\frac{x}{\cos\theta})^2-(\frac{y}{\sin\theta})^2$$

$$=(\frac{2t^2a+b}{4t})^2-(\frac{2t^2a-b}{4t})^2$$

$$=\frac{4(2t^2a)(b)}{16t^2}$$

$$=\frac{ab}{2}$$

即 $$(\frac{x}{\sqrt{\frac{ab}{2}}\cos\theta})^2-(\frac{y}{\sqrt{\frac{ab}{2}}\sin\theta})^2=1$$

是爲雙曲線標準式。

改成下列形式

$$(\frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta})(\frac{x}{\cos\theta}-\frac{y}{\sin\theta})=\frac{ab}{2}$$

可知兩漸近線爲 $y=(\pm\tan\theta)x$，即 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 兩邊所在的直線！

(3)使用微分讓中學生倍感疏離與不安，下面的方式也許會顯得親切些：

將式⑤改由參數 t 集項，則得

$$(2ax\tan\theta-2ay)t^2-(2ab\sin\theta)t+(bx\tan\theta+by)=0$$

爲 t 的二次方程式。

因直線族的每一直線可視爲此曲線的切線（與曲線恰有一個交點），故由判別式等於 0 可得

$$(2ab\sin\theta)^2-4(2ax\tan\theta-2ay)(bx\tan\theta+by)=0,$$

經化簡則成

$$(2\tan^2\theta)x^2-2y^2=ab\sin^2\theta$$

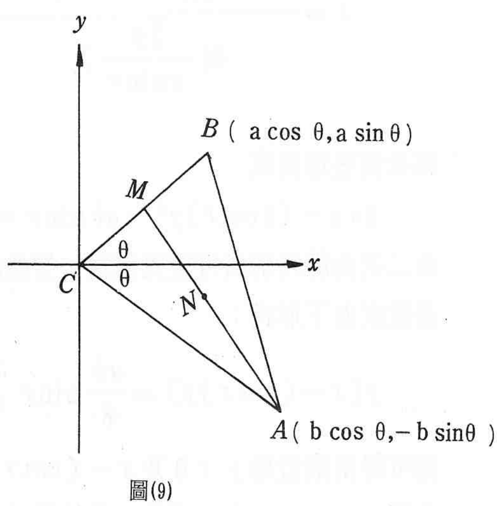
即 $$(\frac{x}{\cos\theta})^2-(\frac{y}{\sin\theta})^2=\frac{ab}{2}$$

與(2)結果可謂“殊途同歸”！

(4)中線在此所扮演的角色如何？以下的演算可以讓我們更加確認，同時做爲(1)中所提“中點軌跡”觀點的一個驗證：

參見圖(9)，$\overline{BC}$ 中點M坐標爲 $(\frac{a}{2}\cos\theta,\ \frac{a}{2}\sin\theta)$，則中線$\overline{AM}$方程式爲

$$\frac{\frac{a}{2}\sin\theta+b\sin\theta}{\frac{a}{2}\cos\theta-b\cos\theta}=\frac{y-\frac{a}{2}\sin\theta}{x-\frac{a}{2}\cos\theta}$$



圖(9)

經整理則成

$$[(a+2b)\sin\theta]x-[(a-2b)\cos\theta]y-2ab\sin\theta\cos\theta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

又：$\overline{AM}$中點N坐標爲

$$\left(\frac{a+2b}{4}\cos\theta\ ,\ \frac{a-2b}{4}\sin\theta\right),$$

$\overline{AM}$爲 $t=\frac{1}{2}$時的面積平分線，自可視爲雙曲線的切線，則中點N應爲其切點。試利用二次曲線上點求切線方程式的方法* 來檢驗——

$$\frac{x\left(\frac{a+2b}{4}\cos\theta\right)}{\cos^2\theta}-\frac{y\left(\frac{a-2b}{4}\sin\theta\right)}{\sin^2\theta}=\frac{ab}{2}$$

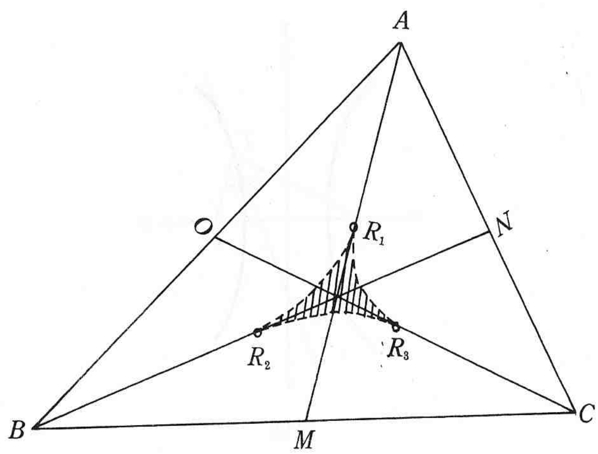
化簡後得

$$\frac{a+2b}{\cos\theta}x-\frac{a-2b}{\sin\theta}y=2ab$$

與式⑨實質相同。這告訴我們，中線爲兩邊界曲線（雙曲線中一支的部分圖形）的公切線，切點在中線的正中央！

(5)冗長的討論易使條理顯得紊亂，在此先作一階段性總結，把“心臟地帶”勾劃清楚，並將形內點依面積平分線的存在個數用圖(10)表示出來：

『“心臟地帶”的邊界由三條曲線兩兩相切於三角形三中線中點處所構成，中線爲其公切線。每一曲線爲以三角形一內角平分線爲對稱軸（貫軸），以此角的兩邊爲漸近線的雙曲線的一支之部分圖形。事實上，整個邊界是所有面積平分線的中點所成的軌跡。心臟地帶中的點具三條面積平分線，邊界上的點則除圖(10)中之R_1、R_2、R_3 三點具一條面積平分線外其他都具兩條面積平分線』



圖(10)

說明：心臟地帶內部的點（斜線區域）具三條面積平分線；邊界上的點除R_1、R_2、R_3 外（虛線上的點）具兩條面積平分線；心臟地帶外部的點及R_1、R_2、R_3三點則具一條面積平分線。

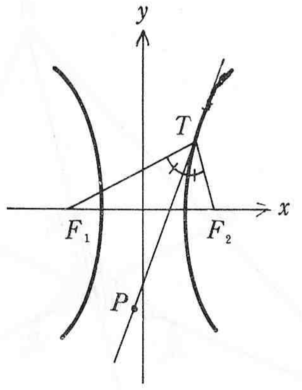
(四)過形內點作面積平分線的答案個數問題是爲本文的一大主題，至此已徹底解決。以下將就作法進行討論——

(1)既然三角形的面積平分線是心臟地帶邊界曲線（雙曲線的部分圖形）的切線，而邊界曲線的切線也都是三角形的面積平分線，則面積平分線的作圖問題，即如何由點P向雙曲線作切線問題。因此先就一般雙曲線做探討：如圖(11)所示，關於雙曲線的切線性質有一則重要的定理——“雙曲線上一點的切線平分過此點之二焦弦的夾角”。（參見〔1〕，p.233）反過來說，T在雙曲線上，且$\overleftrightarrow{TP}$平分$\angle F_1TF_2$，則$\overleftrightarrow{TP}$必爲雙曲線的切線。在此不擬證明，而作直接引用。利用這個定理我們可以對雙曲線作切線如下：

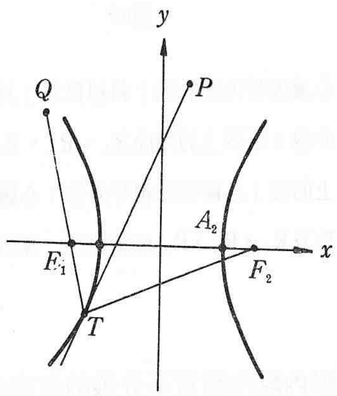
<作法分析>參照圖(12)

1.假設T是雙曲線上的點，$\overleftrightarrow{PT}$ 是切線，則$\angle F_1TP=\angle F_2TP$ ，且$\overline{TF_2}-\overline{TF_1}=$貫軸長$\overline{A_1A_2}$ 。

＊註：雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上一點（$x_1$，$y_1$）的切線爲$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$



圖(11)



圖(12)

2.故將$\overline{TF_1}$延長至使$\overline{TQ}=\overline{TF_2}$（即$\overline{F_1Q}=\overline{A_1A_2}$）。這樣做的目的在製造等腰△以$\overrightarrow{TP}$爲角平分線的聲勢。

3.則$\overline{PQ}=\overline{PF_2}$（$\because \triangle PTQ \cong \triangle PTF_2$）

4.故Q落在以P爲圓心，$\overline{PF_2}$爲半徑的圓上，且Q也落在以F_1爲圓心，$\overline{A_1A_2}$爲半徑的圓上。

<作法三>

1.以焦點F_1爲圓心，$\overline{A_1A_2}$（貫軸長）爲半徑畫一圓。

2.再以P爲圓心，$\overline{PF_2}$爲半徑畫圓，設兩圓交於Q_1、Q_2。

3.連$\overleftrightarrow{F_1Q_1}$，$\overleftrightarrow{F_1Q_2}$，交雙曲線於$T_1$、$T_2$。

4.連$\overleftrightarrow{PT_1}$、$\overleftrightarrow{PT_2}$，即爲所求。

討論：

1.考慮雙曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$之切線方程式$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ *：

設(x_1, y_1)表平面上任一點，則過此點之切線爲

$$y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

移項平方得 $(y_1-mx_1)^2=a^2m^2-b^2$

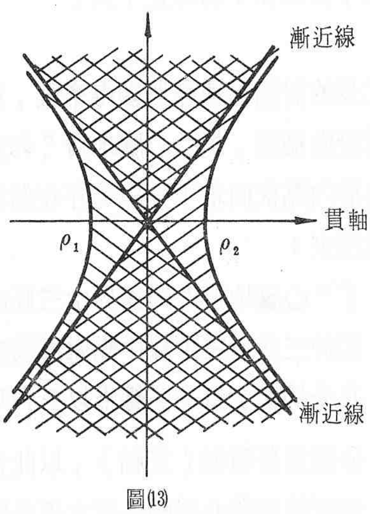
經整理後得

$$(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2+b^2)=0$$

其判別式爲

$$(2x_1y_1)^2-4(x_1^2-a^2)(y_1^2+b^2)=4(a^2y_1^2-b^2x_1^2+a^2b^2)$$

因此可知，當$a^2y_1^2-b^2x_1^2+a^2b^2<0$，即$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}>1$，則點$(x_1, y_1)$在雙曲線“內部”（參見圖(13)之空白部分），無切線存在；當$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，即$(x_1, y_1)$在雙曲線上，可作一條切線；當$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}<1$，即$(x_1, y_1)$在雙曲線之“外部”（圖(13)中之斜線部分），則有兩條切線存在。



圖(13)

2.如圖(13)所示，隨P點位置不同，過P之兩切線切點分別隸屬於左右曲線之情形：左上右下之斜線部分表對左曲線ρ_1作切線，右上左下斜線部分則對ρ_2作切線，重

*註：一般高中教師皆會授及此“公式”，故在此亦直接引用。

疊部分則可對 ρ_1 、 ρ_2 分別作一切線。(請用過 P 的切點法驗證)

3. 若步驟二之兩圓相切，則僅有一條切線，即 P 點必在雙曲線上，P 點即切點。若兩圓不相交，則無切線存在，此時 P 點必在雙曲線之“內部”。

4. 若將步驟一及二中之 F_1 、F_2 角色互換，其所得結果仍同。

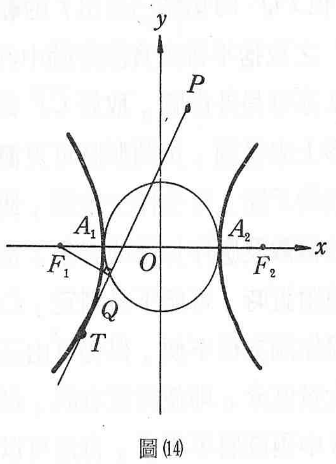
上述作法來解三角形面積平分線問題時，須先將雙曲線畫出，才能作出切點及切線，顯然無法讓人滿意。因此再提出下述改善方法：

<作法分析>

1. 預備知識：〔參見〔1〕，p.233〕
“自雙曲線焦點引切線之垂線的垂足必在主圓上”
(註：主圓即以貫軸 $\overline{A_1A_2}$ 為直徑的圓)

2. 參照圖(14)，假設 $\overleftrightarrow{PT}$ 為過 P 的切線，切點 T，自 F_1 作 $\overleftrightarrow{PT}$ 的垂線得垂足 Q，則 Q 在主圓上，又 Q 在以 $\overline{PF_1}$ 為直徑的圓上。

故得<作法四>如下：



圖(14)

<作法四>

1. 以 O (曲線中心)為圓心，$\overline{OA_1}$ 為半徑畫一圓。

2. 再以 $\overline{PF_1}$ 為直徑畫圓，設兩圓交於 Q_1 、Q_2 。

3. 連 $\overleftrightarrow{PQ_1}$ 、$\overleftrightarrow{PQ_2}$ ，即為所求。

討論：

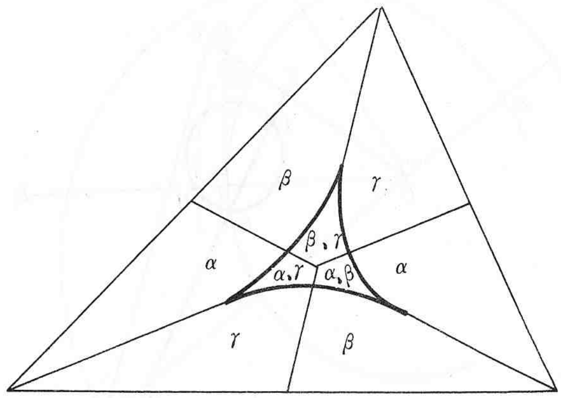
1. 利用主圓作圖，未求出切點即可畫出切線，比起作法三須借用雙曲線來找交點的方式更符合尺規作圖要求。

2. 若兩圓相切，或不相交，則其意義同上作法之討論 3 。

3. 若步驟二改以 $\overline{PF_2}$ 為直徑作圖，所得結果仍同。

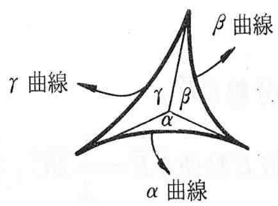
(2)欲將上述雙曲線的切線作圖法落實到面積平分線問題上，須先就 P 點所在位置應對何曲線作圖作一判定：

設 $\angle A$ 所決定的雙曲線部分圖形為 α ，而 $\angle B$ 、$\angle C$ 所決定者分別為 β 、γ ，則由(二)中觀察結果可將三角形分割如圖(15)，各區域



圖(15)

內標示者即該區域內的 P 點應對所標示的曲線作切線。心臟地帶的點一般而言有二條面積平分線，圖(15)中標示如 α 、β 者，表示應對兩者分別作切線，但其一有兩條切線，另一者則只能作出一條。為了清楚起見，再以附圖(15-1)將可作兩條切線的曲線範圍標

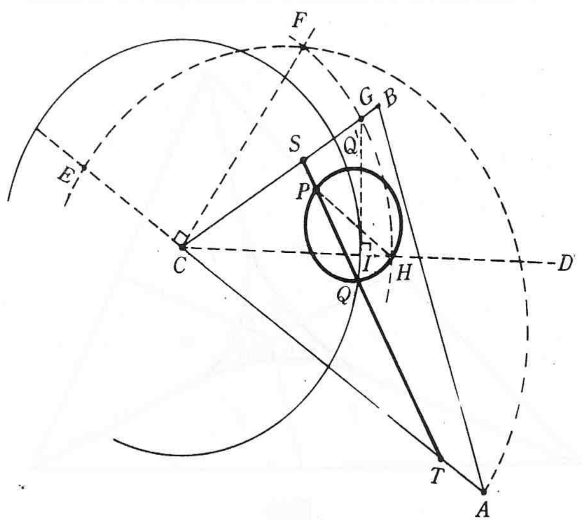


附圖(15～1)

示出來。對任意點 P ，我們可以先作出三中線，即可依圖(15)來判定應對何曲線作切線，並確定作出幾條。

需要澄清的是，我們在(1)部分討論的結果顯示，形內點P對某曲線作切線時，應同時可作出兩條來，如今心臟地帶外的形內點只能對曲線作一條切線（即三角形面積等分線），是因為邊界曲線僅雙曲線的部分圖形，而非完整的一支之故！心臟地帶內的點只作三條而不是四條也是這個原故。

下面提出的即P點對曲線γ作切線的作法，但不必畫出雙曲線來，完全以尺規作圖，參見圖(16)所示：



圖(16)

（註：讀者可參考(三)中(2)的雙曲線方程式

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{ab}{2}}\cos\theta}\right)^2-\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{ab}{2}}\sin\theta}\right)^2=1$$

試作看看）

《作法》

1. 作$\angle C$的平分線$\overrightarrow{CD}$。
2. 延長$\overline{AC}$，取E點使$\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，再以$\overline{AE}$為直徑作半圓，並過$C$作$\overline{CF}\perp\overline{AE}$（$F$為與圓弧的交點）。
3. 以C為圓心，$\overline{CF}$為半徑畫圓弧，與$\overline{BC}$、$\overline{DC}$分別交於G、H。
4. 過G作$\overline{GI}\perp\overline{CD}$（$I$為其垂足）。
5. 以C為圓心，$\overline{CI}$為半徑畫圓；再以$\overline{PH}$為直徑畫圓，得兩圓交點Q。
6. 連$\overleftrightarrow{PQ}$，則$\overleftrightarrow{PQ}$平分$\triangle ABC$。

說明：

1. C為曲線中心，$\overleftrightarrow{CD}$即雙曲線貫軸；H為焦點，而I為曲線頂點；$\overline{CI}$、$\overline{GI}$分別為貫軸、共軛軸長之半。自步驟1至步驟4，目的在建立須用到的各點之正確位置，其中利用到關係式$\overline{CH}^2=\overline{CI}^2+\overline{GI}^2$，及(三)中之方程式

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{ab}{2}}\cos\theta}\right)^2-\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{ab}{2}}\sin\theta}\right)^2=1$$

因$\overline{CI}$、$\overline{GI}$分別為$\sqrt{\frac{ab}{2}}\cos\theta$、$\sqrt{\frac{ab}{2}}\sin\theta$，故知$\overline{CH}=\sqrt{\frac{ab}{2}}=\overline{CF}$。

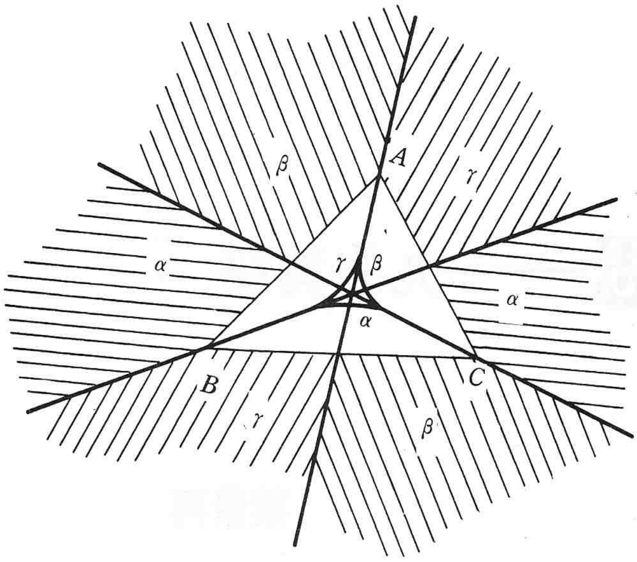
2. 步驟5即上述<作法四>之引用。

討論：

1. 如圖之P，步驟5中兩圓可有兩交點Q、Q'，但$\overleftrightarrow{PQ'}$的切點已超出γ的範圍。Q及Q'之取捨不難由實際作圖中判定。
2. 步驟2亦可另外作圖，取好$\overline{CF}$長再回到三角形上來畫圓，則圖形將可更簡明。
3. 對一般的P點，可先作三中線，便於判定答案的個數及應作切線的對象。當P在邊界曲線附近時，可能不易判定，心臟地帶的實際作圖亦極不便，但仍可由三中線為界作大致區分。即使判定有誤，則作法之步驟5中兩圓將不相交，自然可以發覺，不致得到誤解。

(丙) P在$\triangle ABC$外

對形內點的探討，讓我們幾乎看透了整個問題。事實上，形外點及形上點的情形，都可以視為(乙)部分的一種延伸。圖(17)所示為形外點隨其位置不同而應對何曲線作切線的判別情形:



圖(17)

1. 標示 α 區者表應對曲線 α 作切線；標 β、γ 者同義。
2. 三條分界線即三中線。
3. 中線上的點，中線即所求，不必作切線，自無須區分。

至於它們的作圖，上述《作法》即可適用。對任何形外點 P，先作三中線按圖(17)予以判定，再就判定的曲線對象依法畫圖即可將面積平分線作出。

過形外一點作面積平分線，答案都恰有一條，情形類似形上點，至此已無疑議。

五、結　語

本文針對三角形面積平分線問題的答案個數及幾何作圖作解析探討。由整個內容的比例可以看出，形內點的討論是我們的主題。將雙曲線的理論運用到面積平分問題的解決上，予人一股極大的啓示。

事實上，下述定理可以更直接地展現出兩者的相關性：“雙曲線 $(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2=1$ 的任意切線與漸近線所圍成的三角形具有定值的面積 $A=ab$”（參見〔1〕，p.395）。

一般 n 邊形的面積平分問題，當可由三角形的基礎上加以推廣，但相信仍有許多細節有待謹慎考慮。筆者目前尚繼續探索中，若有較完整的結果可以報告時，再就敎於各位方家。

六、參考資料

〔1〕簡明數學百科全書（九章出版社）

〔2〕第廿三屆中小學科展優勝作品專輯（高中組）：
“多邊形面積平分研究”。

〔3〕第廿六屆中小學科展優勝作品專輯（高中組）：
“等分多邊形之面積與周長的最短路徑”。

〔4〕科學教育月刊第 60 期：
“也談包絡線”（賴漢卿先生）

後　記：

本文感謝編審先生幾度耐心指正，使本人獲益匪淺，謹此致謝。

—本文作者任教於永和國中—