學習數學過程中之觸類旁通

黃毅英

論語裏說：「舉一隅不以三隅反者，則不復也。」數學學習自命是思考的訓練，它又能如何的協助學生舉一反三、觸類旁通呢？這也許是不少老師所感到頭痛的事：尤在較高的班級裏，學生往往在堂上聽得明白，但回到家裏面對數學題便不知從何入手。這便是未能融會貫通、未能舉一反三的表現了。

有人說，練習是學習數學的靈魂，所以光在堂上聽講是不行的。不過，過份的操練（over－drilling）亦未必有益。不少同學做得數不少，但不會變通，也故此不能做到觸類旁通的地步了。這裏，我便想提出，從練習的量轉移到練習的質。這也就是耳熟能詳的、波利亞（Polya）提出的解難四步驟中的「回顧」（looking back）。我以為，同學若能在做好每題數學題後都能花點思考回顧習題，必能事半功倍。

以下搜集了些同學們思考數題的例子，以作拋磚引玉之用。

一題多解

一題多解是常見的題象。多點探索不同的可能性有助於充實自己各種的竅門。有時甲方法是極自然快捷而乙方法是較為繁複，以至令人忽略探究乙方法，但在另一情境裏，乙方法又變得更為有效。是故，考慮一題之多解的目的遠超乎是多學幾套辦法，而是養成思考的習慣。就如行山一樣，培養尋路的意識、探索各種可能性，對於蛛絲馬跡感覺敏銳，故亦能尋出隱蔽的路途。以下麥舉數例說有之：

1. 譬如給直徑端點 A、B，求圓之方程：可先求中點作為圓心，再求半徑；亦可把圓看成是適合 $PA \perp PB$ 的 P 的軌迹。在計算垂分線（perpendicular bisector）與分角線（angle bisector）時，第二種方法便大派用場。而且，它更可應用到計算 $\angle APB = 60°$ 等 P 的軌迹上。

2. 一般證明科西不等式（Cauchy inequality）$(\Sigma a^2)(\Sigma b^2) \geq (\Sigma ab)^2$ 時是考慮 $\Sigma(ax+b)^2 \geq 0$，從而考慮判別式。但這種證明方法較難看出其來龍去脈，我們何不直接的展開，發覺 $(\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2)$ 由兩部份構成，一是 $a_i^2 b_i^2$，另是 $a_i^2 b_j^2$（$i \neq j$）（換言之 $(\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2) = \Sigma a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2$），$(\Sigma a_i b_i)^2$ 則由 $a_i^2 b_i^2$ 和 $a_i b_i a_j b_j$（$i \neq j$）組成。其中 $a_i^2 b_i^2$ 部份對消，餘則由 $(a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$ 證得。

若大家困於 i，j 等抽象符號，可用

$n=3$ 觀察：

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$=(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)+((a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2))$$
$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)+(2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3)$$

故左式減右式等於

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b^2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\geq 0$$

（這種將幾代以實在的數字去觀察是消除對抽象恐懼方法之一）。這種直接展開雖較不「美麗」，但較易令人觸摸個中道理。其他如 A.M.$\geq$G.M. 的證明，單在高級程度考試出現過的已不下七八個，大家可作參考。

3. 香港數理學會之「數學通報」第一期在介紹「數學傳播」十二期葉東進的一篇「談數學思考的指導方法」時也介紹過以下一例：

設 a、b、$c\geq 0$ 證 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$。由於 $\dfrac{(a+b)}{2}\geq\sqrt{ab}$，$\dfrac{(b+c)}{2}\geq\sqrt{bc}$，$\dfrac{(c+a)}{2}\geq\sqrt{ac}$，故

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{a^2b^2c^2}$$

即　$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$。

我們亦可從答案出發：

$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

即　$ab^2+ab^2+bc^2+bc^2+ca^2+ca^2\geq 6abc$，

即　$a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ca)+c(a^2+b^2-2ab)\geq 0$

即　$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0$

後的證明雖較笨拙，但方法容易推廣。這種從答案出發是證明不等式常會用到的，茲再舉兩例：

證 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$

用數學歸納法，即要證明：

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}-2\text{，}$$

即　$4n+4+\dfrac{1}{n+1}+4>4n+8$，

即　$\dfrac{1}{n+1}>0$

證畢。

證 $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

用歸納法，即要證明

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2n+1}{2n+2}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

即　$(2n+1)(2n+3)\leq(2n+2)$

即　$3\leq 4$。

有時從已知出發，未必能順利通到未知，或要先將未知簡化，兩面夾攻，就如玩迷宮遊戲一樣，直至兩面吻合，便能打通一條由已知到未知的路。

4. 求經過三點 A、B、C 圓形的方程：我們可考慮圓心作爲 AB 垂分線與 BC 垂分線的交點。我們也可先設圓的方程爲

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

而用待定係數法。但若待定的係數過多時會有點麻煩。又例如處理複數時，有時可直接運算，有時要先設 $z=a+bi$（坐標化），亦是不同的入手方式。

5. 求以（7，－2）爲中點對於 $x^2+y^2-6x+12y-15=0$ 的弦（Chord）：我們先假設弦爲 $y+2=m(x-7)$，代入圓之方程再考慮 $7=(x_1+x_2)/2$，故 14

爲根之和（ Sum of root ）。這種方法實在太麻煩了，我們只需利用圓心與中點（ 7 ，－2 ）的線段垂直待求之弦，再利用「點—斜率式」（ point — slope form ）便可以了。不過，利用根之和及根之積却是計算較深軌迹時常用之方法。故兩法各有利弊了。

又比如計算圓之切線（ tangent ），當然可以利用切線與半徑垂直，但這在拋物線、橢圓等便行不通了。我們除了可用微積分外，可用判別式的方法，亦可先計出通過兩點 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 的弦的方程，再將 x 代作 x ， y 代作 y 等。

6. 在計算 $\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{2^x}$ ，最方便莫過於用洛必達法則（ L′ Hospital rule ），但用「三文治原理」（ Sandwitch principle ）亦是可以的：先用數學歸納法證明 $n\geq 4$ ， $2^n\geq n^2$ ，故

$$0\leq\frac{7x}{2^x}\leq\frac{7(n+1)}{2^n}\qquad(n=[x])$$

$$\leq\frac{7n+7}{n^2}=\frac{7}{n}+\frac{7}{n^2}\to 0$$

用三文治原理雖然麻煩點，但對於求 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 就方便得多了（ $0\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$ ）；況且，對於 $\frac{\sin x}{x}$ 或涉及 n ！之問題，洛必達法則根本就用不着！

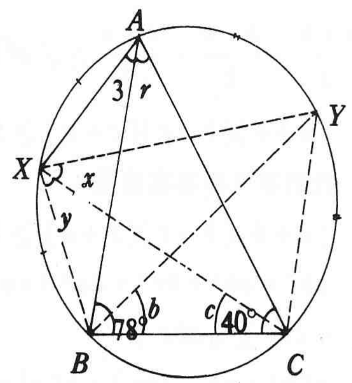
來龍去脈

Examphobiac 君在「數學通報」第六期「 Behind the Examination Questions 」及第十一期「 Hints to Getting Higher Scores in A.L. Pure Math. Exams 」兩文中均強調揣摩問題來龍去脈、其重心、與題目要求的重要性，以免答非所問。這大抵亦是數學作爲製成品與數學作爲製作過程之分野。

故此我們不難發覺，不少同學在看過書本的例題與「模擬答案」之後，仍未能「照板煑碗」，解決類似的問題，就是他們面對的是現成、經過修飾的答案，而不是一個解決的過程與思路。

就以上計算 $\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{2^x}$ 而言，我們最初是沒有想到用歸納法的，用歸納法時也未能預知要規限 $n\geq 4$ ，更沒有考慮要動用〔 X 〕。我們首先知道 2^x 比 X 的任何 m 次方來得「勁」（即有更大的升勢），於此，只要證明 $2^x\geq x^2$ 便夠了。於是便考慮用歸納法。但發現 $2^3<3^2$ ，故要規範 n 由 4 開始（其實可不用數學歸納法而考慮 $2^n=(1+1)^n$ ，再用二項式定理得 $2^n\geq 1+n(1)+\frac{n(n-1)}{2}(1)^2\geq\frac{n(n+1)}{2}$ ——一題多解的另一例），再在套用到計算限時又發覺 x 是一般的實數， n 只是自然數，故須用〔 x 〕$=n$ 加以調整了。若果我們不能如此分析每題數作者的想法，其精髓與關鍵就無法被掌握了。

對於有圖示的解答，我更建議同學們按計



算過程逐步重繪一次。右圖是取自一本通用的中四教科書的例子。已知 $\angle ABC=78°$ ， $\angle ABC=40°$， x 、 y 弧 AB 和弧 AC 的中點

。求$\angle XAC$和$\angle BXY$。答案所示的圖已是最後的圖，故有甚多輔助線。若只求$\angle XAC$ 而言，少點的線已是足夠了。如此按題意重新逐步繪圖便有助於瞭解題目的來龍去脈。

解題有時就像行山的覓路。當我們跟一個人走上大帽山，我們未必能重走一次。我們必須認清那處上坡、那處過溪流、那處遠彎等路標。在看書本上的例題時，我們一定要掌握各題之關鍵（ key step ）。自己做了解答之後，我建議大家不要立即核對「標準答案」，而是自己先行覆核一次，到自己認爲確無疑點時才去核對，久而久之，便能建立一個對錯誤敏銳直覺。若解答時出現困難，眞的要參看「標準答案」或請敎老師時，我覺得若能將兩個答案比較，看那步出了錯，那處走了歪路，那處看不出岔子，則事半而功倍。是故，不少同學在見到較難的數學題時，不加思考便即請敎老師把整題做出，這樣便不能領會到老師的思路來。這也是有人說做錯了題（之後比較正確答案）比做會了題更能獲益之意。

關於看通答案之來龍去脈，茲再舉一例。這是極常見的一條數學題。用 proportion 一字的字母排列，共可出多少個不同的四字母字組？

標準答案是立即分開幾個可能性。我們立即要問，我們如何懂得這麼快就分情況呢？其實，我們可能最先以爲答案是 P_4^{10} 。但發覺其中有三個 0 ，故「應」爲$\dfrac{P_4^{10}}{3!}$。想深一層，我們未必三個 0 全取，於此，我們便考慮分成(1)四字全異、(2)其中兩字相同、(3)兩對字相同、(4)三字相同的情況。

所以，我們不是要「欣賞」標準答案如何把題目解決完畢，而是掌握作者爲何這麼想、怎可以想到某一步等。不過，話說回來，對於一些經長期不斷研究方有成果，積聚了不少成敗經驗、累集了不少人的精力的問題，要講「他們是怎樣解答的？」是不易的。

觸類旁通

要做到觸類旁通，在解決問題之後（回顧），經常考慮題目變動的情況是有助的。再舉例一束如下。

1. 如上面的解決了 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x}{2^x}$ ，可自問 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{2^x}$ 又如何呢（其中 $p(x)$ 是多項式）？在做 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x+4}$ 等等實例後，可問 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ， $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ （ p ， q 均爲多項式）又如何呢？（答案視乎 $p(x)$ 與 $q(x)$ 的重根性── multiplicity of root ）。

2. 以上其實是「推廣」（ generalization ）的一種。第摩非（ De Movire）與二項式定理均是推廣得來的。如譬如推廣第摩根（ De Morgan ）定理得$\sim(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\cdots\wedge p_n)\equiv\sim p_1\vee\sim p_2\vee\cdots\vee\sim p_n$ ；推廣分配律（ Distributive law ）得 $p\wedge(q_1\vee p_2\vee\cdots\cdots\vee q_n)\equiv(p\wedge q_1)\vee(p\wedge q_2)\vee\cdots\vee(p\wedge q_n)$ 、甚或 $\bigwedge_i\bigvee_j p_{ij}\equiv\bigvee_j\bigwedge_i p_{ij}$等。不少不等式都可推廣的。

3. 其實所謂「公式」（ formula ）都是無數實例的綜合，亦有推廣的意義。例如二次方程的公式是從無數次「完全平方法」（ completing square ）處綜合出來的。若已做過不少的完全平方法，便會覺得公式是自然而然出來的，而不是有數學家「作」出來的。這也是基本功的重要。故此若能將每一課題的問題熟習，便自然可綜

合出一類類的數，這也有助於明瞭和解決數學題。

4. 也有時將題目變動時，會出現新的一類數題。書中的一條爲解釋 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}$ 不能運用洛必達法則。故即可問：事既如此，可否用別法計出，於是發覺若 $\deg(p)>\deg(q)$ ，p、q 之最大次的係數爲正，則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)+q(x)\cos x}{p(x)-q(x)\cos x}=1\ ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{q(x)+p(x)\cos x}{q(x)-p(x)\cos x}$$

則不存在。見「數學通報」第八期之問題二。

5. 漸近線即以直線近某曲線，若用二次曲線漸近曲線又如何？故考慮「二次漸近線」，即

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax^2+bx+c))=0$$

而得到類似的結果，見「數學通報」第四期問題3。其實泰勒級數（Taylor series）不也就是以多項式漸近曲線嗎？

6. 在順利計算 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$ 和 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots$ 後，我們發覺重點在於將 $\frac{1}{n(n+1)}$ 變成部份分式（partial fraction）：$\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}$，而利用到 $(\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})=0$ 及 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}+(-1)\frac{1}{n+2}$，而利用 $(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})+(-1)=0$。故一般來說，對於

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots\cdots(x+a_n)}\equiv\frac{c_1}{x+a_1}+\frac{c_2}{x+a_2}+\cdots+\frac{c_n}{x+a_n}\ ,$$

是否仍有 $c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n=0$ 呢？

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}$$

又是甚麼呢？這便是香港考試局高等程度1985年純數卷一第三題的文意。

結語

以上只是零零碎碎的搜集了一些在課堂上遇到的一些事例，自然掛一漏萬。趙振威的「解題思路」一書便提出充分審題、精心聯想、特殊探路、逆推嘗試、變易論題、借助計算、總結規律、舉一反三等部份。有時審查一些對稱性和題目間的同異是有利的。比如利用 $(a^4-a^3b+ab^2+b^3)\div(a^2-b)$ 去計算 $(x-x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y)\div(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{3}})$ 便是一例。

最後，我欲以「數學傳播」第十二期、葉東進「談數學思考的指導方法」一文內的幾句總結：「書本是死的，教師才是活的，……教師所帶給學生的不止是知識上的堆砌與形式上的邏輯推演，……相信有許多優秀的老師，在各個地方，運用着不同的方法，默默耕耘。相信這些教師有着一個共同的看法，即是一位有心的教師，他所能做的絕不是在玩弄數學的形式，賣弄解題技巧的而徒讓學生迷失了；而是要指出方向，提供方法，從旁引導，讓學生有信心試着自己達到他的目標。」

—本文作者任職於香港數理教育學會—