以複數爲座標的解析幾何淺論(Ⅱ)

許振榮　呂素齡

第二章　圓方程式

§2.1　不共線三點所決定的圓

以點 $-\alpha$ 爲中心，半徑爲 ρ (一正實數)的圓之方程式，可寫成

$$(2.1)\qquad (z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})=\rho^2$$

即

$$(2.2)\qquad z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}-\rho^2=0$$

之形狀。反之，方程式：

$$(2.3)\qquad z\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$$

可寫成

$$(z+b)(\bar{z}+\bar{b})=b\bar{b}-c$$

之形狀。故如果 $b\bar{b}-c>0$，則所與的方程式(2.3)表一圓。中心在原點，半徑爲 1 的圓之方程式爲

$$(2.4)\qquad z\bar{z}=1。$$

此圓稱爲單位圓。

設點 t 在單位圓上變動(故 $t\bar{t}=1$)，又 ρ 爲一固定正實數時，

$$(2.5)\qquad z=a+\rho t$$

表以 a 爲中心，半徑爲 ρ 之圓。此因，滿足(2.5)式之點 z 必須滿足下式之故

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=\rho t\cdot\rho\bar{t}=\rho^2。$$

(2.5)式稱爲以 t 爲參數的，圓之參數方程式。

現在來求經過不在一直線上的三點 a,b,c 的圓之方程式。設所求的方程式爲(2.1)式，即(2.2)式。因爲三點 a,b,c 在此圓上，故下列三式成立：

$$(2.6)\qquad \begin{cases} a\bar{a}+\bar{\alpha}a+\alpha\bar{a}+\alpha\bar{\alpha}-\rho^2=0, \\ b\bar{b}+\bar{\alpha}b+\alpha\bar{b}+\alpha\bar{\alpha}-\rho^2=0, \\ c\bar{c}+\bar{\alpha}c+\alpha\bar{c}+\alpha\bar{\alpha}-\rho^2=0。\end{cases}$$

(2.2)和(2.6)等四條件表示：下列方程組有 $\xi_1=1$，$\xi_2=\bar{\alpha}$，$\xi_3=\alpha$，$\xi_4=\alpha\bar{\alpha}-\rho$ (ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 不全爲零)之解：

$$(2.7)\qquad \begin{cases} z\bar{z}\xi_1+z\xi_2+\bar{z}\xi_3+\xi_4=0, \\ a\bar{a}\xi_1+a\xi_2+\bar{a}\xi_3+\xi_4=0, \\ b\bar{b}\xi_1+b\xi_2+\bar{b}\xi_3+\xi_4=0, \\ c\bar{c}\xi_1+c\xi_2+\bar{c}\xi_3+\xi_4=0。\end{cases}$$

因此，其係數之行列式必等於零。即

$$(2.8)\quad \begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ a\bar{a} & a & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

成立。因爲 a, b, c 三點不在同一直線上，故

$$(2.9)\quad \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \neq 0。$$

反之，如果(2.9)式成立，則(2.8)式表經過 a, b, c 三點之圓。其理由如下：把(2.8)式左邊的行列式關於第一列展開，則得(因(2.9)成立)：

$$(2.10)\quad z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=\gamma,$$

此處

$$(2.11)\quad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} \\ b\bar{b} & b & \bar{b} \\ c\bar{c} & c & \bar{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}。$$

因此(2.10)式可寫成下列形狀

$$(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})=\alpha\bar{\alpha}+\gamma。$$

因爲 $z=a$ 滿足(2.8)式，故滿足此方程式。所以

$$(a+\alpha)(\bar{a}+\bar{\alpha})=\alpha\bar{\alpha}+\gamma。$$

因此 $\alpha\bar{\alpha}+\gamma>0$，故方程式(2.8)式表一圓。

由上面的討論，我們並得知：不在一直線上的三點 a, b, c 決定方程式(2.8)所表示的圓。

注意：我們已知(2.9)式成立時(2.8)表一圓。那麼(2.9)不成立時，即

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

成立時，情形如何？此時當然 a, b, c 三點在一直線上。此時(2.8)式可寫成下列形狀：

$$(2.12)\quad \begin{vmatrix} a\bar{a} & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix} \bar{z} + \begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} \\ b\bar{b} & b & \bar{b} \\ c\bar{c} & c & \bar{c} \end{vmatrix} = 0$$

此式中，z 和 $\bar{z}$ 之係數爲共軛複數，故同時等於零，或同時不等於零。先假設上式中常數項不等於零。此時 z，$\bar{z}$ 係數也不等於零而(2.12)可寫成

$$\frac{z}{\alpha'}+\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha'}}=1$$

之形狀。此處

$$\alpha' = -\frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} \\ b\bar{b} & b & \bar{b} \\ c\bar{c} & c & \bar{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\bar{a} & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\bar{\alpha'} = \frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} \\ b\bar{b} & b & \bar{b} \\ c\bar{c} & c & \bar{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix}}。$$

故此時(2.8)式表三點 a, b, c 所在之直線。此直線不經過原點。

如果常數項等於零，則 z 之係數不等於零

。此時（2.12）式可寫成

$$z-\alpha''\bar{z}=0$$

之形狀。此處

$$\alpha''=\frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\bar{a} & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

此時三點 a，b，c 所在的直線經過原點。

§2.2 圓之參數方程式

在§2.1 我們提到了圓之參數方程式 $z=a+\rho t$。現在我們想討論圓的更一般的參數方程式。首先我們想證明：

當 ρ 在所有實數上變動時滿足 $z=\dfrac{C+D\rho}{A+B\rho}$，$AD-BC\neq 0$的點 z 的集合或爲一圓，抑或爲一直線

證明：在

$$(2.13)\qquad z=\frac{C+D\rho}{A+B\rho}，AD-BC\neq 0$$
$$-\infty<\rho<\infty$$

中，如果 $B=0$，則$A\neq 0$，$D\neq 0$。此時從（2.13）可得

$$z=\frac{C}{A}+\frac{D}{A}\rho，\rho=-\frac{C}{D}+\frac{A}{D}z。$$

故此時（2.13）表一經過點$\dfrac{C}{A}$之直線。

其次我們假設$B\neq 0$。從（2.13）可得

$$(2.14)\qquad \rho=\frac{C-Az}{-D+Bz}。$$

因爲 ρ 爲實數，$\rho=\bar{\rho}$ 成立。故

$$(2.15)\qquad \frac{C-Az}{-D+Bz}=\frac{\bar{C}-\bar{A}\bar{z}}{-\bar{D}+\bar{B}\bar{z}}$$

成立。從此式又可得

$$(2.16)\qquad (C-Az)(-\bar{D}+\bar{B}\bar{z})$$
$$=(\bar{C}-\bar{A}\bar{z})(-D+Bz)$$

即

$$(2.17)\qquad -C\bar{D}+A\bar{D}z+C\bar{B}z-A\bar{B}z\bar{z}$$
$$=-\bar{C}D+B\bar{C}z+\bar{A}D\bar{z}-\bar{A}Bz\bar{z}$$

故得

$$(2.18)\qquad (A\bar{B}-\bar{A}B)z\bar{z}+(B\bar{C}-A\bar{D})z$$
$$+(\bar{A}D-\bar{B}C)\bar{z}=\bar{C}D-C\bar{D}$$

如果$A\bar{B}-AB\neq 0$，則得

$$(2.19)\qquad z\bar{z}=\frac{B\bar{C}-A\bar{D}}{A\bar{B}-\bar{A}B}z+\frac{\bar{A}D-\bar{B}C}{A\bar{B}-\bar{A}B}\bar{z}$$
$$=\frac{\bar{C}D-C\bar{D}}{A\bar{B}-\bar{A}B}$$

故可得下列式子：

$$(2.20)\qquad \left(z+\frac{\bar{A}D-\bar{B}C}{A\bar{B}-\bar{A}B}\right)\left(\bar{z}+\frac{B\bar{C}-A\bar{D}}{A\bar{B}-\bar{A}B}\right)$$
$$=\frac{(\bar{A}D-\bar{B}C)(B\bar{C}-A\bar{D})+(A\bar{B}-\bar{A}B)(\bar{C}D-C\bar{D})}{(A\bar{B}-\bar{A}B)^2}$$

此式右邊之分子

$$=BC(\bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C})-AD(\bar{B}\bar{C}-\bar{A}\bar{D})$$
$$=-(AD-BC)(\bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C})<0。$$

此式右邊之分母爲$(A\bar{B}-\bar{A}B)^2<0$。此因，$A\bar{B}-\bar{A}B$爲一純虛數之故。因此，（2.20）式表一圓。

以上已證明了，$B\neq 0$時，當 ρ 在所有實數上變動時，滿足（2.13）式的點 z 均在圓（2.19）〔或（2.20）〕上。是否圓（2.19）上的點均滿足（2.13）式？我們先注意：點 $z=\dfrac{D}{B}$在圓（2.18）上。此因，如果代入 $z=\dfrac{D}{B}$於（2.18）中式左邊，就可得其右邊之故：

$$(A\bar{B}-\bar{A}B)\frac{D\bar{D}}{B\bar{B}}+(B\bar{C}-A\bar{D})\frac{D}{B}+(\bar{A}D-\bar{B}C)\frac{\bar{D}}{\bar{B}}$$
$$=\left(\frac{A}{B}D\bar{D}-\frac{\bar{A}}{\bar{B}}D\bar{D}\right)+\left(\bar{C}D-\frac{A}{B}D\bar{D}\right)+$$
$$\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}D\bar{D}-C\bar{D}\right)$$
$$=\bar{C}D-C\bar{D}$$

設 z 爲圓（2.19）之一點，故滿足（2.18）式，即滿足（2.17）式。此式各邊可因式分解

而得(2.16)式。故如果 $z \neq \frac{D}{B}$，則(2.16)式之兩邊可以 $(-D+Bz)(-\bar{D}+\bar{B}\bar{z})$ 除之而得(2.15)式。今置 ρ 爲(2.14)所表者，則(2.15)表示：ρ 爲一實數，而 z 可表成(2.13)之形狀。

由此討論得知：點圓(2.19)上除了點 $z=\frac{D}{B}$ 之外，其他各點均滿足(2.13)式。

注意：在§2.4 中我們提到：直線爲經過 Gauss 平面上的無限遠點∞的圓。故可視實數直線上的點∞對應於 $z=\frac{D}{B}$。

其次，假設 $A\bar{B}-\bar{A}B=0$。在此情形下先考慮 $\bar{C}D-C\bar{D}\neq 0$ 之情形。此時 $B\bar{C}-A\bar{D}\neq 0$，$\bar{A}D-\bar{B}C\neq 0$。故(2.18)式可寫成下列形狀：

$$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1,$$

此處

$$a=\frac{\bar{C}D-C\bar{D}}{B\bar{C}-A\bar{D}}$$

$$\bar{a}=\frac{C\bar{D}-\bar{C}D}{\bar{B}C-\bar{A}D}=\frac{\bar{C}D-C\bar{D}}{\bar{A}D-B\bar{C}}$$

故方程式(2.18)表不經過原點之一直線。

如果 $A\bar{B}-\bar{A}B=0$，$\bar{C}D-C\bar{D}=0$ 同時成立，則不妨假設 $B\bar{C}-A\bar{D}\neq 0$，$\bar{A}D-\bar{B}C\neq 0$。此時(2.18)式可寫成下列形狀：

$$z+\frac{\bar{A}D-\bar{B}C}{B\bar{C}-A\bar{D}}\bar{z}=0, \quad \left|\frac{\bar{A}D-\bar{B}C}{B\bar{C}-A\bar{D}}\right|=1。$$

故(2.18)表經過原點之一直線。

我們也可證明：

當 t 在單位圓上變動時，

$$(2.21) \qquad z=\frac{C+Dt}{A+Bt}, \quad AD-BC\neq 0$$

所定義的點 z 之集合爲一圓或爲一直線。

此事實之證明與上列事實之證明很相似：

當 $B=0$ 時 $A\neq 0$，$D\neq 0$

故 $z=\frac{C}{A}+\frac{D}{A}t$，$t=\frac{A}{D}(z-\frac{C}{A})$

因此，

$$(z-\frac{C}{A})(\bar{z}-\frac{\bar{C}}{\bar{A}})=\frac{D\bar{D}}{A\bar{A}}t\bar{t}=\frac{D\bar{D}}{A\bar{A}}。$$

故(2.21)式表一圓。

如果 $B\neq 0$，則從(2.21)式可得

$$(2.22) \qquad t=\frac{C-Az}{-D+Bz},$$

故 $$\bar{t}=\frac{1}{t}=\frac{\bar{C}-\bar{A}\bar{z}}{-\bar{D}+\bar{B}\bar{z}}。$$

所以下式成立：

$$(2.23) \qquad \frac{C-Az}{-D+Bz}\cdot\frac{\bar{C}-\bar{A}\bar{z}}{-\bar{D}+\bar{B}\bar{z}}=1$$

由此式，可得

$$(2.24) \qquad (A\bar{A}-B\bar{B})z\bar{z}+(B\bar{D}-A\bar{C})z+(\bar{B}D-\bar{A}C)\bar{z}=D\bar{D}-C\bar{C}。$$

如果 $A\bar{A}-B\bar{B}\neq 0$，從此式可得

$$z\bar{z}+\frac{B\bar{D}-A\bar{C}}{A\bar{A}-B\bar{B}}z+\frac{\bar{B}D-\bar{A}C}{A\bar{A}-B\bar{B}}\bar{z}=\frac{D\bar{D}-C\bar{C}}{A\bar{A}-B\bar{B}}$$

即

$$(2.25) \qquad (z+\frac{\bar{B}D-\bar{A}C}{A\bar{A}-B\bar{B}})(\bar{z}+\frac{B\bar{D}-A\bar{C}}{A\bar{A}-B\bar{B}})=\frac{(B\bar{D}-A\bar{C})(\bar{B}D-\bar{A}C)+(A\bar{A}-B\bar{B})(D\bar{D}-C\bar{C})}{(A\bar{A}-B\bar{B})^2}$$

此式中 $\frac{B\bar{D}-A\bar{C}}{A\bar{A}-B\bar{B}}$ 爲 $\frac{\bar{B}D-\bar{A}C}{A\bar{A}-B\bar{B}}$ 之共軛複數。

又 此式右邊之分子

$=AD(\bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C})-BC(\bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C})$

$=(AD-BC)(\bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C})>0$。

因爲 $A\bar{A}$，$B\bar{B}$ 均爲實數，此式右邊之分母：$(A\bar{A}-B\bar{B})^2>0$。因此，(2.25)之右邊大於零。所以(2.25)式表一圓。

現在把 $z=\frac{D}{B}$ 代入於(2.24)，可得

$$(A\bar{A}-B\bar{B})\frac{D\bar{D}}{B\bar{B}}+(B\bar{D}-A\bar{C})\frac{D}{B}+$$

$$(\bar{B}D-\bar{A}C)\frac{\bar{D}}{\bar{B}}-(D\bar{D}-C\bar{C})$$

$$=\left(\frac{A}{B}\frac{\bar{A}}{\bar{B}}D\bar{D}-D\bar{D}\right)+\left(D\bar{D}-\frac{A}{B}\bar{D}C\right)$$

$$+\left(D\bar{D}-\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\bar{D}C\right)-\left(D\bar{D}-C\bar{C}\right)$$

$$=\left(\frac{A}{B}D-C\right)\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}-\bar{C}\right)$$

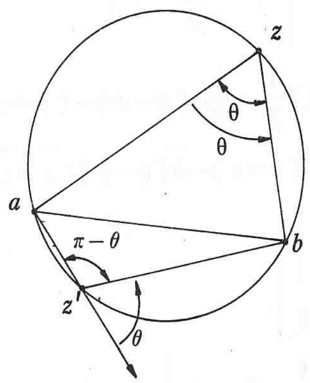
$$=\frac{1}{B\bar{B}}(AD-BC)(\bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C})\neq 0$$

故點 $z=\frac{D}{B}$ 不在圓(2.25)上。所以對於圓(2.24)上的所有點 $z\neq\frac{D}{B}$ 成立。因此,圓(2.25)之所有點均滿足(2.21)式。即滿足(2.21)之點集爲圓(2.25)。

$A\bar{A}-B\bar{B}=0$ 時與上面的討論相同地證明(2.24)式表一直線。

§2.3　圓周角

設 a, b 爲相異二點。現在來考慮或滿足 $\angle azb=\theta=$ 一定角, $0<\theta<\pi$ 抑或滿足 $\angle azb=\pi-\theta$ 的點 z 之集合。我們想證明這樣的點在以 ab 爲一弦的一圓周上。



(圖 2.1)

設 $\angle azb=\theta$。此時假設

$$a-z=\rho_1 e^{i\alpha},$$

$$b-z=\rho_2 e^{i\beta},$$

$$\beta-\alpha=\theta,$$

則

$$\frac{b-z}{a-z}=\frac{\rho_2}{\rho_1}e^{i(\beta-\alpha)}\equiv\rho e^{i\theta}$$

$$0\leq\rho<\infty$$

其次假設 $\angle azb=\pi-\theta$。又設

$$z-a=\rho_1' e^{i\alpha'},\quad b-z=\rho_2' e^{i\beta'},$$

則

$$\beta'-\alpha'=\theta \text{ 而 } \frac{b-z}{z-a}=\frac{\rho_2'}{\rho_1'}e^{i(\beta'-\alpha')}$$

$$=\rho' e^{i\theta}。$$

故

$$\frac{b-z}{a-z}=(-\rho')e^{i\theta}=\rho e^{i\theta}$$

$$-\infty<\rho=-\rho'<0$$

綜合上述二種情形,不論 z 滿足那一條件均有下列方程式成立:

$$(2.26)\quad \frac{b-z}{a-z}=\rho e^{i\theta},\ -\infty<\rho<\infty$$

故有下列關係存在:

$$\rho=\frac{be^{-i\theta}-e^{-i\theta}z}{a-z},\ -\infty<\rho<\infty$$

即有

$$\rho=\frac{C-Az}{-D+Bz}$$

之關係成立。此處 $A=e^{-i\theta}$, $B=-1$, $C=be^{-i\theta}$, $D=-a$,

因此

$$(2.27)\quad z=\frac{C+D\rho}{A+B\rho}$$

而 $AD-BC=-ae^{-i\theta}+be^{-i\theta}$

$$=e^{-i\theta}(b-a)\neq 0。$$

因爲 $A\bar{B}-\bar{A}B=-e^{-i\theta}+e^{i\theta}=e^{-i\theta}\cdot(e^{2i\theta}-1)\neq 0$, 因 $0<\theta<\pi$。故依§2.2之討論,所考慮的點均在一圓周上,又點 $z=a$ 亦在此圓上。顯然點 $z=b$(對應於 $\rho=0$)亦在此圓上。故 ab 爲此圓之一弦。

其次我們想證明如下的事實:

設 a, b 爲圓周上二相異點, z, z' 爲圓周上與 a, b 相異的任二點,則或 $\angle azb=\angle az'b$ 成立抑爲 $\angle az'b=\pi-\angle azb$ 成立。

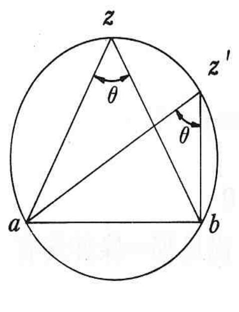
此時$\angle azb$稱爲弦ab上的圓周角。

證明：設K爲任一圓。a，b，c爲圓K上互異的三點。令設

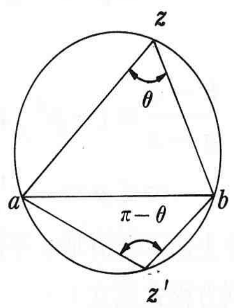
$$(2.28)\qquad \frac{b-c}{a-c}=\rho_0\, e^{i\theta_0}$$

而考慮滿足

$$(2.29)\qquad \frac{b-z}{a-z}=\rho e^{i\theta_0},\ -\infty<\rho<\infty$$



（圖2.2）



（圖2.3）

的所有點z之集合。依§2.2 之討論，包含此集合的圓經過點a和點b。此圓又顯然經過c。故此圓爲三點a，b，c所決定的圓K。因此，(2.29)所定義的點集爲從圓K除去點a後可得的點集合。所以K上與a，b相異的點z或滿足$\angle azb=\angle acb$抑或滿足$\angle azb=\pi-\angle acb$。故$\angle az'b=\angle azb$成立或$\angle az'b=\pi-\angle azb$成立。

因爲(2.29)所定義的圓爲三點a,b,c所決定的圓K，故所與三點a,b,c之圓之方程式亦可依§2.2之方法求之如下：

從(2.28)和(2.29)二式可得

$$\frac{b-z}{a-z}\Big/\frac{b-c}{a-c}=\frac{(a-c)(b-z)}{(b-c)(a-z)}=\rho$$

爲一實數。故

$$\frac{(a-c)(b-z)}{(b-c)(a-z)}=\frac{(\bar a-\bar c)(\bar b-\bar z)}{(\bar b-\bar c)(\bar a-\bar z)}$$

成立。因此

$$(b-c)(\bar a-\bar c)(a-z)(\bar b-\bar z)=(\bar b-\bar c)(a-c)(\bar a-\bar z)(b-z)$$

即得方程式：

$$\begin{aligned}(2.30)\ &[(b-a)(\bar a-\bar c)-(\bar b-\bar c)(a-c)]z\bar z\\ &+[\bar a(\bar b-\bar c)(a-c)-\bar b(b-c)(\bar a-\bar c)]z\\ &+[b(\bar b-\bar c)(a-c)-a(b-c)(\bar a-\bar c)]\bar z\\ &+[a\bar b(b-c)(\bar a-\bar c)-\bar a b(\bar b-\bar c)(a-c)]\\ &=0\end{aligned}$$

(2.30)式應當是三點a，b，c所決定的圓K之方程式。雖外表上與(2.8)式不相同但是很容易檢證(2.30)與(2.8)完全相同。要證明此事，先注意下列事實：即

$$\begin{vmatrix} a & a' & 1\\ b & b' & 1\\ c & c' & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-c & a'-c' & 0\\ b-c & b'-c' & 0\\ c & c' & 1\end{vmatrix}$$

$$=(b'-c')(a-c)-(b-c)(a'-c')。$$

應用此關係我們可得：

$$\begin{vmatrix} a & \bar a & 1\\ b & \bar b & 1\\ c & \bar c & 1\end{vmatrix}=(\bar b-\bar c)(a-c)-(b-c)(\bar a-\bar c),$$

$$\begin{vmatrix} a\bar a & a & 1\\ b\bar b & \bar b & 1\\ c\bar c & \bar c & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\bar a\bar b\bar c\begin{vmatrix} a & \frac{1}{\bar a} & 1\\ b & \frac{1}{\bar b} & 1\\ c & \frac{1}{\bar c} & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\bar a\bar b\bar c\left[\left(\frac{1}{\bar b}-\frac{1}{\bar c}\right)(a-c)-(b-c)\left(\frac{1}{\bar a}-\frac{1}{\bar c}\right)\right]$$

$$=\bar a(\bar b-\bar c)(a-c)-\bar b(b-c)(\bar a-\bar c),$$

$$\begin{vmatrix} a\bar a & a & 1\\ b\bar b & b & 1\\ c\bar c & c & 1\end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \bar a & 1\\ \frac{1}{b} & \bar b & 1\\ \frac{1}{c} & \bar c & 1\end{vmatrix}$$

$$=abc\left[(\overline{b}-\overline{c})\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)(\overline{a}-\overline{c})\right]$$

$$=-b(a-c)(\overline{b}-\overline{c})+a(b-c)(\overline{a}-\overline{c})$$

$$\begin{vmatrix} a\overline{a} & a & \overline{a} \\ b\overline{b} & b & \overline{b} \\ c\overline{c} & c & \overline{c} \end{vmatrix}$$

$$=-abc\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{\overline{a}} & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{\overline{b}} & 1 \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{\overline{c}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-abc\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\left[\left(\frac{1}{\overline{b}}-\frac{1}{\overline{c}}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{\overline{a}}-\frac{1}{\overline{c}}\right)\right]$$

$$=-\overline{a}b(\overline{b}-\overline{c})(a-c)+a\overline{b}(b-c)(\overline{a}-\overline{c})$$

故方程式（2.30）完全與方程式（2.8）相同。因此三點 a,b,c 所決定的圓亦可以下列參數方程式表之：即由

$$\rho=\frac{(b-c)(a-z)}{(a-c)(b-z)}$$

可得

$$z=\frac{-a(b-c)+b(a-c)\rho}{-(b-c)+(a-c)\rho},\quad -\infty<\rho<+\infty \tag{2.31}$$

此處

$$\begin{vmatrix} -a(b-c) & b(a-c) \\ -(b-c) & (a-c) \end{vmatrix}$$

$$=-(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$$

§2.4 四點在一圓周上的條件，Miquel 定理

相異四點 a_0,a_1,a_2,a_3 在同一圓周上之條件可由（2.8）式得之如下：

$$\begin{vmatrix} a_0\overline{a_0} & a_0 & \overline{a_0} & 1 \\ a_1\overline{a_1} & a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_2\overline{a_2} & a_2 & \overline{a_2} & 1 \\ a_3\overline{a_3} & a_3 & \overline{a_3} & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{2.32}$$

應用§2.3的討論，我們也可以求四點 a_0,a_1,a_2,a_3 爲共圓的其他條件如下：這些四點爲共圓之條件係 a_2,a_3 滿足方程式：

$$\frac{a_1-z}{a_0-z}=\rho e^{i\theta},\ \theta\text{爲定角，}\rho\text{爲實數。}$$

即有二實數 ρ_2,ρ_3 存在使下列二式成立：

$$\frac{a_1-a_2}{a_0-a_2}=\rho_2e^{i\theta},\quad \frac{a_1-a_3}{a_0-a_3}=\rho_3e^{i\theta}\text{。}$$

故
$$\frac{a_0-a_2}{a_1-a_2}:\frac{a_0-a_3}{a_1-a_3}=\frac{\rho_3}{\rho_2}$$

爲一實數。

我們把左邊之比以 $W(a_0,a_1,a_2,a_3)$ 表之。稱爲四點 a_0,a_1,a_2,a_3 之複比。因此可得下列結論：

相異的四點 a_0,a_1,a_2,a_3 爲共圓之充要條件係複比

$$W(a_0,a_1,a_2,a_3)=\frac{a_0-a_2}{a_1-a_2}:\frac{a_0-a_3}{a_1-a_3}$$

爲一實數。

設 Gauss 平面上的無限遠點爲∞。設 a,b,c,d 爲四點。我們可定義

$$\frac{a\cdot\infty+b}{c\cdot\infty+d}=\frac{a+b(\frac{1}{\infty})}{c+d(\frac{1}{\infty})}=\frac{a}{c}\text{。}$$

此時可得

$$W(a_0,a_1,a_2,\infty)$$

$$=\frac{a_0-a_2}{a_1-a_2}:\frac{a_0-\infty}{a_1-\infty}$$

$$=\frac{a_0-a_2}{a_1-a_2}\text{。}$$

故，$W(a_0,a_1,a_2,\infty)$ 爲一實數之條件係 a_0,a_1,a_2 三點在一直線上。此因，如果

$$a_0-a_2=\rho_0e^{i\theta_0},\quad a_1-a_2=\rho_1e^{i\theta_1}$$

則
$$\frac{a_0-a_2}{a_1-a_2}=\frac{\rho_0}{\rho_1}e^{i(\theta_0-\theta_1)}=\text{一實數}$$
，故

$\theta_0 - \theta_1 = 0$ 或 π 之故 。因此，直線可視爲經過Gauss 平面上的無限遠點 ∞ 之圓。

爲上述四點在一圓周上的條件之一應用，我們可證明下列定理：

Miquel的定理：設 S_1, S_2, S_3, S_4 爲平面上的四圓。設 $S_i \cap S_j$ ($i \neq j$) 表示二圓 S_i 與 S_j 之交點所成的集合。今設 $S_1 \cap S_2 = \{z_1, w_1\}$, $S_2 \cap S_3 = \{z_2, w_2\}$, $S_3 \cap S_4 = \{z_3, w_3\}$, $S_4 \cap S_1 = \{z_4, w_4\}$, 如果四點 z_1, z_2, z_3, z_4 在同一圓周上，則四點 w_1, w_2, w_3, w_4 亦在同一圓周上。

證明：因 z_1, w_1, z_2, w_2 在同一圓周 S_2 上；z_2, w_2, z_3, w_3 在 S_3 上；z_3, w_3, z_4, w_4 在 S_4 上；z_4, w_4, z_1, w_1 在 S_1 上。故 $w(z_1, w_2, z_2, w_1)$, $w(z_2, w_3, z_3, w_2)$, $w(z_3, w_4, z_4, w_3)$ 和 $w(z_4, w_1, z_1, w_4)$ 均爲實數。故

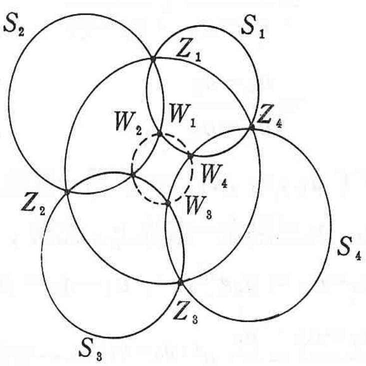
$$\frac{w(z_1, w_2, z_2, w_1)\cdot w(z_3, w_4, z_4, w_3)}{w(z_2, w_3, z_3, w_2)\cdot w(z_4, w_1, z_1, w_4)}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{z_1-z_2}{w_2-z_2}\Big/\dfrac{z_1-w_1}{w_2-w_1}\right)\left(\dfrac{z_3-z_4}{w_4-z_4}\Big/\dfrac{z_3-w_3}{w_4-w_3}\right)}{\left(\dfrac{z_2-z_3}{w_3-z_3}\Big/\dfrac{z_2-w_2}{w_3-w_2}\right)\left(\dfrac{z_4-z_1}{w_1-z_1}\Big/\dfrac{z_4-w_4}{w_1-w_4}\right)}$$

$$=\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\cdot\frac{w_3-w_4}{w_1-w_4}\cdot\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}$$

$$=w(z_1, z_3, z_2, z_4)\cdot w(w_1, w_3, w_2, w_4)$$

爲一實數。所以如果 $w(z_1, z_3, z_2, z_4)$ 爲一實數，則 $w(w_1, w_3, w_2, w_4)$ 亦爲一實數。即如果 z_1, z_2, z_3, z_4 在同一圓周上，則 w_1, w_2, w_3, w_4 亦在一圓周上。



(圖 2.4)

§2.5 圓之切線、極點、極線

設圓 K 之方程式爲

$z = a + \rho t$, $|t| = 1$, ρ 爲一定正實數。此圓上，對應於 $t = t_1, t = t_2$ 之二點連接線（即圓之弦）之方程式爲

$$\begin{vmatrix} z & \bar z & 1 \\ a+\rho t_1 & \bar a+\overline{\rho t_1} & 1 \\ a+\rho t_2 & \bar a+\overline{\rho t_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-a & \bar z-\bar a & 1 \\ \rho t_1 & \dfrac{\rho}{t_1} & 1 \\ \rho t_2 & \dfrac{\rho}{t_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即

(2.33) $z+t_1t_2\bar z = a+t_1t_2\bar a+\rho(t_1+t_2)$

當 t_2 沿單位圓周接近於點 t_1 時，圓 K 上的點 $z_2 = a+\rho t_2$ 沿圓周 K 上接近於點 $z_1 = a+\rho t_1$。此時變動的弦 z_2z_1 之極限位置稱爲圓 K 在點 z_1 處的切線，其方程式爲（當 $t_2 \to t_1$）。

(2.34) $z+t_1^2\bar z = a+t_1^2\bar a+2t_1\rho$

經過點 z_1 的直徑之另一端點之座標爲 $z_1' = a-\rho t_1$。故在 z_1' 點的切線之方程式爲

(2.35) $z+t_1^2\bar z = a+t_1^2\bar a-2t_1\rho$

直徑 az_1 之方程式爲

$$\begin{vmatrix} z & \bar z & 1 \\ a & \bar a & 1 \\ a+\rho t_1 & \bar a+\dfrac{\rho}{t_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-a & \bar z-\bar a & 0 \\ a & \bar a & 1 \\ \rho t_1 & \dfrac{\rho}{t_1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即

(2.36) $z-t_1^2\bar z = a-t_1^2\bar a$

同理，直徑az_2之方程式爲

(2.37) $z-t_2^2\bar{z}=a-t_2^2\bar{a}$。

最後弦z'_1z_2之方程式可在(2.33)中把t_1以$-t_1$代換而得之：

(2.38) $z-t_1t_2z=a-t_1t_2a+\rho(t_2-t_1)$

現在來求直徑$z_1z'_1$和在z_1處的切線之交角。爲此目的比較方程式(2.36)中$\bar{z}$之係數和方程式(2.34)中$\bar{z}$之係數。因爲

$$-t_1=(-1)t_1^2=e^{i\frac{\pi}{2}}t_1^2$$

故依§ 1.3之討論

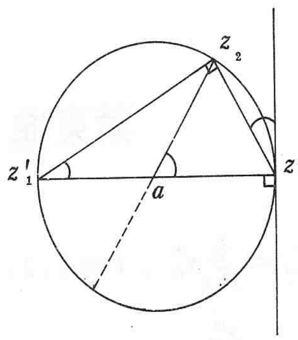
在點z_1處的切線與經過z_1的直徑垂直。

其次來求z_1z_2與在z_1處的切線之交角。故比較(2.33)式的$\bar{z}$之係數和(2.34)式的$\bar{z}$之係數。

因爲

$$t_1t_2=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)t_1^2=e^{i\theta}t_1^2,$$

此處 $e^{i\theta}=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$。故依§ 1.3之討論此二直線之交角爲$\theta$。



(圖2.5)

今又比較(2.38)式中$\bar{z}$之係數和(2.36)式中$\bar{z}$之係數。因爲

$$(-t_1t_2)=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)(-t_1^2)=e^{i\theta}(-t_1^2)。$$

故弦z'_1z_2和直徑z'_1z_1所成的角亦爲θ。因此可得：

在z_1處的切線與弦z_1z_2所成的角與在弦z_1z_2上之圓周角相等。

最後比較方程式(2.37)中$\bar{z}$之係數和方程式(2.36)中$\bar{z}$之係數。因爲

$$-t_2^2=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2(-t_1^2)=e^{2i\theta}(-t_1^2)$$

故此二直徑之交角爲2θ，此交角稱爲弦z_1z_2上之中心角。因此可得

在弦z_1z_2上之中心角爲在弦z_1z_2上的圓周角之二倍。

現在來求從圓外之一點至圓所引的切線之方程式。

設z_0爲圓K外之一點。又設圓K之方程式爲

$$z=a+\rho t,\ |t|=1,\ \rho\text{ 爲一定正實數。}$$

設從z_0對於圓K所引的切線爲在點$z_1=a+\rho t_1$處之切線。故

(2.34) $z+t_1^2\bar{z}=a+t_1^2\bar{a}+2\rho t_1$。

因爲z_0在此切線上，

$$z_0+t_1^2\bar{z}_0=a+t_1^2\bar{a}+2\rho t_1,$$

即

(2.39) $(\bar{a}-\bar{z}_0)t_1^2+2\rho t_1+(a-z_0)=0$

因z_0在圓K上之外

(2.40) $(a-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)>\rho^2$。

因爲(2.40)成立，解(2.39)可得

$$t_1=\frac{-\rho\pm i\sqrt{(a-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)-\rho^2}}{\bar{a}-\bar{z}}$$

把此二值代入於(2.34)中可得，從z_0向圓K所引的二條切線之方程式。

從點z_0向圓K所引的二切線之切點之座標分別爲$z_1=a+\rho t_1$，$z_2=a+\rho t_2$。此處

$$t_1=\frac{-\rho+i\sqrt{(a-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)-\rho^2}}{\bar{a}-\bar{z}}$$

$$t_2=\frac{-\rho-i\sqrt{(a-z_0)(\bar{a}-z_0)-\rho^2}}{\bar{a}-\bar{z}}$$

連接此二點的直線之方程式爲

(2.41) $z+t_1t_2\bar{z}=a+t_1t_2\bar{a}+\rho(t_1+t_2)$

因爲

$$t_1+t_2=-\frac{2\rho}{\bar{a}-\bar{z}_0},\quad t_1t_2=\frac{a-z_0}{\bar{a}-\bar{z}_0}$$

故連接此二切線之直線之方程式爲

$$(2,42)\quad \bar{z}+\frac{a-z_0}{\bar{a}-\bar{z}_0}=a+\frac{a+z_0-}{\bar{a}-\bar{z}_0}\bar{a}-\frac{2\rho^2}{\bar{a}-\bar{z}_0}$$

此直線稱爲點 z_0 關於圓 K 之極線。反之，假設 z_1，z_2 爲圓 K 上任二點。現在來求以連接此二點的直線(2.41)爲極線的點 $\bar{z}_0$ 之座標。如此的點 z_0 稱爲直線(2.41)之極點。如果 z_0 爲直線(2.41)之極點，則比較方程式(2.41)和(2.42)可得

$$t_1t_2=\frac{a-z_0}{\bar{a}-\bar{z}_0},\quad t_1+t_2=\frac{-2\rho}{\bar{a}-\bar{z}_0}\quad 。$$

因此

$$\bar{a}-\bar{z}_0=\frac{-2\rho}{t_1+t_2}$$

故

$$\bar{z}=\bar{a}+\frac{2\rho}{t_1+t_2}$$

而 $$z_0=a+\frac{2\rho}{\bar{t}_1+\bar{t}_2}=a+\frac{2\rho t_1t_2}{t_1+t_2}$$

即直線(2.41)之極點 z_0 可表成

$$z_0=a+\frac{2\rho t_1t_2}{t_1+t_2}$$

二圓之共有切線亦可容易地求得。