11302　極小值問題（張鎮華提供）

求 $\min\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ 使得 $\prod_{i=1}^{n} x_i = Q$，$x_i \geqslant 1$，$i=1,\cdots\cdots,n$，其中 Q 為大於 1 的常數，$x_{n+1} = x_1$。

解答：（張鎮華提供）

(甲) n 是偶數時，設 $n=2m$，則

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(x_{2j-1} x_{2j} - x_{2j-1} - x_{2j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \{ (x_{2j-1} - 1)(x_{2j} - 1) - 1 \} \geqslant -m$$

等號成立的充要條件是

$$x_{2j-1} = 1 \text{ 或 } x_{2j} = 1,$$

對所有 $j=1, 2, \cdots\cdots, m$ 均成立。同理也可將原式寫成

$$\sum_{j=1}^{m} \{ (x_{2j} - 1)(x_{2j+1} - 1) - 1 \} \geqslant -m$$

第號成立的充要條件是

$$x_{2j} = 1 \text{ 或 } x_{2j+1} = 1,$$

對所有 $j=1, 2, \cdots\cdots, m$ 均成立。上面兩組條件合成得到，等號成立的充要條件是

$$x_1 = x_3 = \cdots = x_{2n-1} = 1 \text{ 且}$$

$$x_2 = x_4 = \cdots = x_n = \sqrt[m]{Q}$$

或

$$x_1 = x_3 = \cdots = x_{2n-1} = \sqrt[m]{Q} \text{ 且}$$

$$x_2 = x_4 = \cdots = x_n = 1$$

所以極小值是 $-m$。

(乙) n 是奇數時，我們猜想極小值發生在 $x_1 = \cdots\cdots = x_n = \sqrt[n]{Q}$ 時，但沒辦法證明。