自然組試題解答及評論

朱建正

和兩年前的做法一樣，我希望還其本來面目。所以我把所有試題再改回計算證明題形式提出後解之。但是如果有特別應付選擇、填充的妙法，我會另外說明。

子、設α, β, γ爲三複數，且多項式$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-6x^2+3x+3$，求$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$及$\alpha\beta\gamma$之値。

利用此一線索，求$(x-\frac{1}{\alpha^2})(x-\frac{1}{\beta^2})(x-\frac{1}{\gamma^2})$的展式中各項係數之値。

題旨： 這是明顯的多項式恆等式概念下的根與係數的關係。即$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$以及若$P(x)\equiv Q(x)$則其各項係數皆對應相等。

第二部分有兩種解法，一爲簡單對稱式的變形與代換，另一法爲變根變換。變根變換稍快些。

解：

$$\alpha+\beta+\gamma=6$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,$$
$$\alpha\beta\gamma=-3$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{9+36}{9}$$
$$=5$$

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{36-6}{9}$$
$$=\frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{1}{9}$$

故多項式爲$x^3-5x^2+\frac{10}{3}x-\frac{1}{9}$

另解： $x^3-6x^2+3x+3=0$ 中的x和新方程式$y^3+py^2+qy+\gamma=0$中的y的關係爲$y=\frac{1}{x^2}$。即$x=\frac{1}{\sqrt{y}}$。代

回原式。

得 $(\frac{1}{\sqrt{y}})^3-\frac{6}{y}+\frac{3}{\sqrt{y}}+3=0$

$$\frac{1}{y}(\frac{1}{y}+3)^2=(\frac{6}{y}-3)^2$$

即 $(1+3y)^2=y(6-3y)^2$

$$1+6y+9y^2$$
$$=36y-36y^2+9y^3$$

即 $9y^3-45y^2+30y-1=0$

或 $y^3-5y^2+\frac{10}{3}y-\frac{1}{9}=0$

評註：有人認爲變根變換不列在新教材中，故不宜考。而由根與係數關係解之，則因$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ 的變形還有點麻煩，故結論是對懂變根變換者有利。但變根變換的計算仍要小心才不會錯。當然選擇題在計算出錯時常可以檢出。

丑、用牛頓法近似一次，求 $f(x)=x^{10}-x^3-10x^2-10000=0$ 之所有實根。計算時以 ± 2 爲起始值。

這是設計得很好的引導解題式的選擇題組。如果你知道牛頓求根法的幾何意義，就是求切線的 x 截距，那你就可以輕鬆地依據本題的指示一步步地求出答案。

首先計算 $f(-2)$ 及 $f'(-2)$。

得 $f(-2)=1024+8-40-1000$
$=-8$

$f'(x)=10x^9-3x^2-20x$
$=-5120-12+40$
$=-5092$

故 $k=-5092\times 2-8$
$=-10192$

在 $y=-5092x-10192$ 中

令 $y=0$

得 $x=-\frac{10192}{5092}=-2.0016$

其次依同法算 $f(2)$ 及 $f'(2)$

$f(2)=1024-8-40-1000=-24$

$f'(2)=5120-12-40=5068$

故 $k=-5068\times 2-24=-10160$

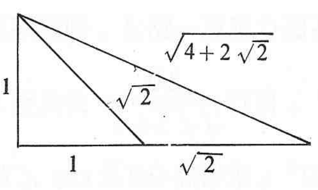
故得 $x=-\frac{10160}{5068}=2.0047$

評註：本題的數目雖然大，但是計算不繁。這是題目經過仔細設計的結果。又如果用霍納(Horner)法，或稱賈憲法，則因平移費事而不易爲之。又由笛卡兒堪根法，因 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 之變號數皆只有一個，故得 $f(x)$ 恰有正負根各1。又命爲選擇題恰好提示學生要以 ± 2 做爲起始點，太巧妙了。不懂牛頓法的學生看到這組數據不禁傻了眼，因爲他無法用代入法。經計算器測試 $f(2.0047)=0.075$，而 $f(2.0032)$ 已經是 -7.664 了。

本題設計時，從 $x^{10}-1024$ 著手，所加入之三次三項式爲 $-x^3-10x^2+24$，其根亦在 ± 2 附近。但若 x 稍有變化，則 $x^{10}-1024$ 離零立刻增加。這是設計之要領。對多項式函數圖形熟悉，且知牛頓法的意義幾何意義，本題不易答錯。

1. 將單位圓周八等分，令其分點依逆時針向爲 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$，連 A_1A_4，A_2A_7，A_3A_6，A_5A_8，成一十字區域。求此區域之面積。

正八邊形之圓心角爲 $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$



十字形之寬爲 $2\sin\frac{\pi}{8}=\frac{2}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$(1+\sqrt{2})^2+1=4+2\sqrt{2}$

（其實以 $\frac{2}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ 爲答亦可）

此十字形的棒子，可以視爲由兩個 $\frac{\pi}{4}$ 角的扇形加上兩個全等的等腰三角形。

故爲 $\frac{\pi}{8}\times 2+2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$

$$=\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故十字形之面積爲

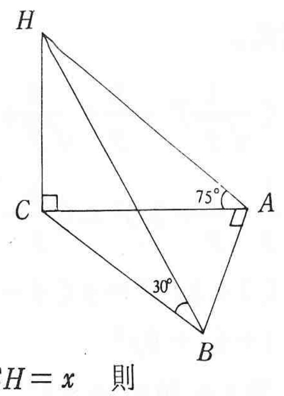
$$2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$$

評註：此題和去年社會組試題的面積問題的解法類似。都是出入相補原理和扇形面積的應用。其解法之組合方式有許多種。

2.某人自塔底 C 正東一點 A，仰視塔頂 H，得仰角 $75°$。南行 $\frac{20}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}$ 公尺至 B，再測得仰角 $30°$。求塔高 CH 及 $\cos\angle BCA$。

解：依題意作圖



令 $CH=x$ 則

$$x^2(\cot^2 30°-\cot^2 75°)$$

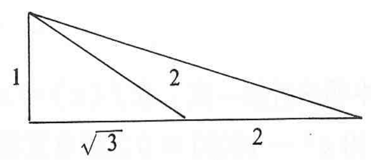
$$=\frac{900}{\sqrt{3}+1}$$

$$x^2\left(3-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}\right)$$

$$=\frac{900}{\sqrt{3}+1}$$

$$x^2(3-(2-\sqrt{3})^2)$$

$$=\frac{900}{\sqrt{3}+1}$$



$$3-(2-\sqrt{3})^2$$

$$=4(\sqrt{3}-1)$$

故 $x=\frac{30}{2\sqrt{2}}=\frac{15}{\sqrt{2}}$

$\cos\angle BCA$

$$=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$=\frac{x\cot 75°}{x\cot 30°}$$

$$=\frac{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$$

3.解不等式

$2\log 2+\log(x^2-5x+3)<2\log(12+5x-x^2)$

即解
$$x^2-5x+3>0 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$12+5x-x^2>0 \quad\cdots\cdots(2)$$
$$(12+5x-x^2)^2>4(x^2-5x+3) \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\begin{array}{l}
1\ -5\ -12 \\
\underline{1\ -5\ -12} \\
\quad -5+25+60 \\
\quad\quad -12+60+144 \\
\hline
1\ -10+1\ +120+144 \\
\hline
\quad -4\ +20-12 \\
1\ -10-3\ +140-132 \quad (-1 \\
\quad -1+11-8 \\
\hline
1\ -11+8\ +132 \quad\quad (6 \\
\quad +6-30 \\
\hline
1\ -5\ -22
\end{array}$$

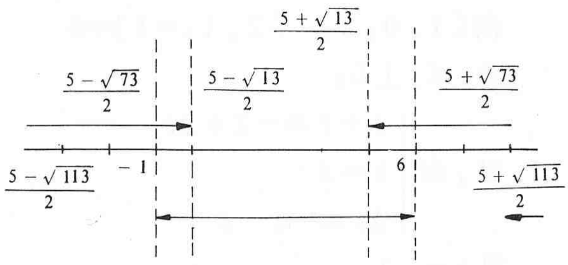
（求根嘗試部分略去，我試 2，3，4）

由(1) $x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $x>\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

由(2) $\dfrac{5-\sqrt{73}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$

(3)即 $x^4-10x^3-3x^2+140x+132>0$

$(x+1)(x-6)(x^2-5x-22)>0$



故得 $-1<x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<x<6$

說明(1) $\sqrt{13}$，$\sqrt{73}$，$\sqrt{113}$ 都用估算，以確定它和 -1，6 的相關位置。

(2)綜合除法的試除很麻煩。稍微安排一下，可免於草算中重抄被除式。

(3)就填充題求解而言，可以不必如此詳細。畫出數軸，標出坐標即可。

評註：此題計算最煩。據一位同事表示，他花了 30 分鐘。當然學生是選手一定比較快些。

4.設 $4x+y=5$ 與 $xy=1$ 交於 A，B 兩點。試求 A，B 之間雙曲線上一點 C，使過 C 點的切線平行 AB，並求 $\triangle ABC$ 之面積。

聯解 $\begin{cases}4x+y=5\\ xy=1\end{cases}$

得 $(\frac{1}{4},4)(1,1)$ 為兩交點。

由 $y=\dfrac{1}{x}$ 得 $y'=\dfrac{-1}{x^2}$，$\dfrac{-1}{x^2}=-4$

故 $x=\dfrac{1}{2}$ 知 $C=(\dfrac{1}{2},2)$

$$面積=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 4\\ \frac{1}{2} & 2\\ 1 & 1\end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2-2-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{8}$$

評註：這是由平均值定理想出來的點子。當然也可以由過曲線上一點 (x_0,y_0) 的切線公式 $\frac{1}{2}(xy_0+yx_0)=1$ 來做。但是這樣做較慢。二次方程判別式也可以。

5.連擲 4 次銅板，出現偶數次（包括零次）正面的機率為多少？連擲 10 次，如果已知前面

4次出現偶數正面，則全部10次中出現6次正面的條件機率為何？

$P(B)=\frac{1}{2^4}(1+C_2^4+1)$

$=\frac{1}{2^4}(2+6)$

$=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{2^{10}}(1+C_2^4\cdot C_4^6+C_2^6)$

$=\frac{1}{2^{10}}(1+6\cdot 15+15)$

$=\frac{53}{2^9}$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{53}{2^9}}{\frac{1}{2}}=\frac{53}{2^8}=\frac{53}{256}$$

註：中央日報登的儒林補習班解答把這題算成 $\frac{31}{512}$ 了。

二、設 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ -a^3 & 1 & -a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ -a & a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}$ 之值

顯然 $a^2=i$ 故 a 是 $z^8=+1$ 的原根

$a^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)=-\bar{a}$

$$\text{原式}=\begin{array}{r} \\ \bar{a}\times \\ i\times \\ \bar{a}\times \end{array}\begin{vmatrix} 1 & a & i & -\bar{a} \\ \bar{a} & 1 & -a & i \\ i & -\bar{a} & 1 & \bar{a} \\ -a & i & +\bar{a} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-i\begin{vmatrix} 1 & a & i & -\bar{a} \\ 1 & a & -i & ai \\ -1 & -\bar{a}i & i & ai \\ -1 & -\bar{a}i & -i & \bar{a} \end{vmatrix}$$

$$=-i\begin{vmatrix} 1 & a & i & -\bar{a} \\ 0 & 0 & -2i & ai+\bar{a} \\ 0 & a-\bar{a}i & 2i & ai-\bar{a} \\ 0 & \bar{a}i+a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-i\begin{vmatrix} 0 & -2i & ai+\bar{a} \\ a-\bar{a}i & 2i & ai-\bar{a} \\ \bar{a}i+a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-i(ai+a)\begin{vmatrix} -2i & ai+\bar{a} \\ 2i & ai-\bar{a} \end{vmatrix}$$

$$=-i(\bar{a}i+a)\begin{vmatrix} -2i & ai+\bar{a} \\ 0 & 2ai \end{vmatrix}$$

$=-2[\bar{a}i+a)(2ai)$

$=-4(-1-1)$

$=8$

評註：降階最快，不要花招。路線多條皆可。

三、$L_1\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$

$L_2:\begin{cases} x-2y=-2 \\ x-3y-z=-1 \end{cases}$

求證 $L_1\cap L_2\neq\phi$，且 $L_1\perp L_2$

L_1 即 $\begin{cases} y=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$

或 $(1,1,0)+t(1,0,2)$

L_2 即 $\begin{cases} x-2y=-2 \\ -y-z=1 \end{cases}$

或 $(-2,0,-1)+s(2,1,-1$

因 $(1,0,2)\cdot(2,1,-1)=0$

故 $L_1\perp L_2$

又，由 $\begin{cases} 1+t=-2+2s \\ 1=s \\ 2t=-1-s \end{cases}$

得 $t=-1$

故知 $L_1\cap L_2=(0,1,-2)$

評註：此題計算極簡單，設計得宜。

四、設 $\alpha<\beta<\gamma$，且 $\gamma-\beta=\beta-\alpha$，$\ell$，

m，n為任意三數。

求證：存在唯一組實數 a，b，c，使

$f(x)=ax^2+bx+c$

滿足 $f(\alpha)=\ell$，$f(\beta)=m$，$f(\gamma)=n$。

並將 $\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=S$

以 α，γ 及 ℓ，m，n 表之。

解：1.

$$\text{因}\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=\ell \\ a\beta^2+b\beta+c=m \\ a\gamma^2+b\gamma+c=n \end{cases}\text{中，}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \gamma & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$$

故由聯立線性方程理論知上式有唯一解。(用Lagrange插值公式亦可)

2.此即以一拋物線過點 (α,ℓ)，(β,m)，(γ,n)，求拋物線下之有號面積。

解：因面積與平移無關，故令

$\beta-\alpha=\gamma-\beta=h$

將 β 平移至原點。$2h=\gamma-\alpha$

三點變為 $(-h,\ell)$，$(0,m)$，(h,n)

$$\text{方程式}\begin{cases} ah^2-bh+c=\ell \\ c=m \\ ah^2+bh+c=n \end{cases}$$

$$2ah^2+2c=\ell+n$$

$$ah^2+c=\frac{\ell+n}{2}$$

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\,dx$$

$$=\frac{2ah^3}{3}+2ch$$

$$=\frac{2h}{3}\left(\frac{\ell+n}{2}\right)+\frac{4}{3}ch$$

$$=\frac{h}{3}\left(\frac{\ell+n}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot mh$$

$$=\frac{1}{3}(\gamma-\alpha)\left(\frac{\ell+n}{2}+2m\right)\text{ 或}$$

$$=\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)(\ell+4m+n)$$

評註：1.這就是Simpson 法求積分的近似方法原理。課本有詳細證明。但由於參數多，學生一定很頭痛。不平移亦可做出。方法相同，但是麻煩些。

2. Simpson 法等於中點矩形法和梯形法按2：1的加權平均。三次函數用Simpson 法算得之結果為其眞值解。

3.某報解答係以驗證 $\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)(\ell+4m+n)$ 的方法為之。然後註以，此題似乎以Simpson法解之較佳。讀之令人啼笑皆非。

結論：

(1)由於填充2. 3.兩題計算繁，故學生不易得高分，高標準必較去年低。且因難度稍高，低標準也會降低。

(2)統計都沒考。到底統計該不該考，是一個值得辯論的問題。至少我以為考統計的計算沒意思。

(3)微積分的考法大出考生準備之外。一題求斜率，一題牛頓法，一題Simpson 法，都只是多項式的微積分而已。當然明年會怎樣考誰也不知道。但是以基本觀念為重，大概錯不了。

—本文作者任教於台灣大學數學系—