實驗教材的回顧與七十六年大學聯考試題檢討

李勝利

六十九年開始，數學與自然科學課程改進計劃在中正預校展開實驗教學工作，筆者有幸參加這一個計劃的先驅實驗教學，整個數學實驗教材的精神或特色不外乎：㈠課文淺顯，容易閱讀㈡增列隨堂練習，隨時評量學生的學習成果㈢沒有條舉式的定義或定理，符號的使用強調通俗原則㈣定理的引出或證明採直觀法，常由例題的驗證或生活經驗加以歸納結論㈤培養學生思考、推理與操作運算的能力㈥評量盡量採用部分給分法㈦充實教師手册的內容㈧兼顧科際的平衡發展。七十二年正式推出以後，全國分北、中、南三區，設有教學輔導網，並定期舉行教學研討會，其中發現兩個較大的問題：㈠多數老師感到教學時數不足㈡部分學校很少使用教科書。推究其因：新教材的實施無疑是一次教與學的大衝擊，教師們已經習慣了舊教材的教法而一時未能適應新教材，同時在恨鐵不成鋼的心理驅使之下，一再補充舊有教材、傳授解題技巧，使學生不但沒有因爲新教材的改革蒙受其利，反而背負了教師們捨不得拋棄的包袱——被删除的舊教材，例如一年級一開始，就强迫學生學習邏輯與集合，或許部分老師覺得這些教材非常管用，可是三年下來，並沒有因爲缺少邏輯符號的教材而使新課程的內容無法推進；再者，課本提到函數時，於是乎函數定義、映至、映成、一對一、合成、反函數等等便在課堂中大作文章，部分老師堅持的理由是：能保證這些教材在大學聯考時不會出現嗎？其次談到課本使用的問題，在大學聯考競爭的壓力之下，替學生編印講義，整理要點原是無可厚非，可是這樣的教學方法使得學生所學到的只是片斷的知識與一些解題的特殊技巧，而無法將教材內容融會貫通，同時也養成了學生處處依賴老師以及參考書的習慣。

今年大學聯考試題對新課程來說是一項極大的考驗，無疑的，將是領導今後的教學趨向，綜觀兩組的考題，都沒有超出課程範圍，也無需特別的解題技巧，只要教科書的內容觀念清楚就足以應考——給學生、家長、老師一個最肯定的答覆。今年的試題，自然組的同學想要得高分，平時就得養成親自動手計算的習慣，至於社會組的考題，則告訴學生，今後在學習的過程中，不要强記解題方法，死背公式，而應徹底將觀念弄清楚。如果兩組考題的計算能力與觀念分析能夠平均分配，那麼今年的試題將更爲靈活，也更能提高鑑別度。現就部分試題提出拙見如下：

一、自然組試題

I. 選擇題第一大題

㈠設 α，β，γ 爲三複數，且

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=x^3-6x^2+3x+3，則$$

1. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=?$ （被選答案略）

2. $\alpha\beta\gamma=?$

(二)若 α，β，γ 如同上述，設多項式

$$x^3+px^2+qx+\gamma$$

$$=(x-\frac{1}{\alpha^2})(x-\frac{1}{\beta^2})(x-\frac{1}{\gamma^2})$$，則

3. $p=?$　　4. $q=?$　　5. $\gamma=?$

其解法大致有下列兩種：

(1)由 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=x^3-6x^2+3x+3$，

將上式左邊展開，並比較係數，得

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+(-\alpha\beta\gamma)$$

$=x^3-6x^2+3x+3$，　故

$$\alpha+\beta+\gamma=6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\alpha\beta\gamma=-3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

同理，由　$x^3+px^2+qx+\gamma$

$$=(x-\frac{1}{\alpha^2})(x-\frac{1}{\beta^2})(x-\frac{1}{\gamma^2})$$　可得

$$p=-(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}) \quad \cdots\cdots ④$$

$$q=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\gamma=-\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \quad \cdots\cdots ⑥$$

由④得

$$p=-(\frac{1}{\alpha\beta\gamma})^2[\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2]$$

$$=-(\frac{1}{\alpha\beta\gamma})^2[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$=-(\frac{1}{-3})^2[3^2-2\cdot(-3)\cdot 6]$$　（由①，②，③）

$$=-5$$

由⑤得

$$q=(\frac{1}{\alpha\beta\gamma})^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$=(\frac{1}{\alpha\beta\gamma})^2[(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]$$

$$=(\frac{1}{-3})^2[6^2-2\cdot 3]$$

（由①，②，③）

$$=\frac{10}{3}$$

最後由⑥得

$$\gamma=-(\frac{1}{\alpha\beta\gamma})^2=-\frac{1}{9}$$

(2)由 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=x^3-6x^2+3x+3$

知 α，β，γ 爲方程式

$x^3-6x^2+3x+3=0$　之三根，

由方程式根與係數的關係知

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$

$$\alpha\beta\gamma=-3$$

再由　$x^2+px^2+qx+\gamma$

$$=(x-\frac{1}{\alpha^2})(x-\frac{1}{\beta^2})(x-\frac{1}{\gamma^2})$$

知，以 $\frac{1}{\alpha^2}$，$\frac{1}{\beta^2}$，$\frac{1}{\gamma^2}$ 爲三根之新方程式爲 $x^2+px^2+qx+\gamma=0$，其中 α，β，γ 爲原方程式 $x^3-6x^2+3x+3=0$ 之三根，利用根的變換解之：

令　$y=x^2$　得　$x=\sqrt{y}$　，

代入原方程式 $x^3-6x^2+3x+3=0$ 中，

得　$(\sqrt{y})^3-6(\sqrt{y})^2+3(\sqrt{y})+3=0$

整理之，得以 α^2，β^2，γ^2 爲三根的新方程式爲　$y^3-30y^2+45y-9=0$

再對上式做倒根變換，得

$$(\frac{1}{z})^3-30(\frac{1}{z})^2+45(\frac{1}{z})-9=0$$

整理之，得以 $\frac{1}{\alpha^2}$，$\frac{1}{\beta^2}$，$\frac{1}{\gamma^2}$ 爲三根的新方

程式爲

$$z^3-5z^2+\frac{10}{3}z-\frac{1}{9}=0$$

與 $x^2+px^2+qx+\gamma=0$ 比較，

知 $p=-5$，$q=\frac{10}{3}$，$\gamma=-\frac{1}{9}$。

上述的第一種解法，利用題組的方式，引出概念及其解題方法，可說出題合乎新教材的精神，且無所謂新舊教材之分；至於第二種解法，不但要利用到三次方程式根與係數的關係，而且還要藉助於變根的觀念，兩者皆屬於舊教材的範圍，無怪乎不少的傳播媒體要多加指責，而補習班則抓住此一機會大肆宣傳，强調舊教材的重要性；這一個考驗，又給新教材的推廣蒙上了一層陰影，在我們無法瞭解命題教授的原意下，希望這只是前述第一種解法的立足精神。

Ⅱ。非選擇題第四大題

設有三數 $\alpha<\beta<\gamma$，且 $\gamma-\beta=\beta-\alpha$，而 ℓ，m，n 爲任給的三個實數。

(1)試證明：存在唯一的一組實數 a，b，c，使得函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足了 $f(\alpha)=\ell$，$f(\beta)=m$，$f(\gamma)=n$

(2) $\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=S$。試用 α，γ 及 ℓ，m，n 表示 S，並證明之。（S 式中不得含有 a，b，c 或 β）

考完後，幾乎所有的傳播媒體都認爲這一個題目的證明、計算都非常困難而且繁雜，百分之九十九的考生將拿不到分數，讓我們先看一看這些“非常困難”的解法。

(1)因爲 $f(\alpha)=\ell$，$f(\beta)=m$，$f(\gamma)=n$

故取一函數

$$g(x)=\ell\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+m\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+n\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

則得 $g(\alpha)=\ell=f(\alpha)$

$g(\beta)=m=f(\beta)$

$g(\gamma)=n=f(\gamma)$

又 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之次數皆未超過二次，

故 $f(x)=g(x)$，亦即

$$f(x)=\ell\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+m\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+n\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

令 $\gamma-\beta=\beta-\alpha=d$

得 $\gamma-\alpha=2d$，

或 $d=\frac{\gamma-\alpha}{2}$，

且 $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$，

故 $f(x)$

$$=\frac{\ell(x-\beta)(x-\gamma)-2m(x-\gamma)\cdot(x-\alpha)+n(x-\alpha)(x-\beta)}{2d^2}$$

得 $a=\frac{\ell-2m+n}{2d^2}$

$$b=\frac{-\ell(\beta+\gamma)+2m(\gamma+\alpha)-n(\alpha+\beta)}{2d^2}$$

$$c=\frac{\ell\beta\gamma-2m\gamma\alpha+m\alpha\beta}{2d^2}$$

式中 ℓ，m，n，α，β，γ，$d=\frac{\gamma-\alpha}{2}$ 爲定數，因此 a，b，c 之解存在且唯一

(2) $S=\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=\int_\alpha^\gamma (ax^2+bx+c)\,dx$

$=\frac{1}{3}a(\gamma^3-\alpha^3)+\frac{1}{2}b(\gamma^2-\alpha^2)+c(\gamma-\alpha)$

將 a，b，c 之值及 $d=\frac{\gamma-\alpha}{2}$ 代入上式，

得 $S=\frac{1}{\gamma-\alpha}\{\frac{2}{3}(\ell-2m+n)(\alpha^2+\gamma\alpha+\gamma^2)+[-\ell(\beta+\gamma)+2m(\gamma+\alpha)-n(\alpha+\beta)]\times(\gamma+\alpha)+2(\ell\beta\gamma-2m\gamma\alpha+n\alpha\beta)\}$

再將 $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ 代入上式，得

$$S=\frac{1}{\gamma-\alpha}\{\frac{2}{3}(\ell-2m+n)(\alpha^2+\gamma\alpha+\gamma^2)+[-\ell(\frac{\alpha+3\gamma}{2})+2m(\gamma+\alpha)-n(\frac{3\alpha+\gamma}{2})](\gamma+\alpha)+2[\ell(\frac{\alpha+\gamma}{2})\gamma-2m\gamma\alpha+n\alpha(\frac{\alpha+\gamma}{2})]\}$$

從以上的證明，我們可以發現函數 $g(x)$ 的假設，眞是太技巧了，而且 $f(x)$ 在 $[\alpha,\gamma]$ 上的定積分，又過於繁雜，要在考場上拿到分數，自然是難上加難！

在課堂上，對於需要推理或證明較長的定理，部分老師常常以聯考不會出題爲理由而叫學生只背定理的結果，如此一來，學生只知其然，而不知其所以然，更造成學生從不研讀課本的壞習慣，就以本題爲例，其實是課本裏面所提到有關於近似積分的拋物線辛浦森法，只是課本對於通過 $(\alpha, f(\alpha))$，$(\frac{\alpha+\gamma}{2}, f(\frac{\alpha+\gamma}{2}))$，$(\gamma, f(\gamma))$ 三點所做的二次函數的拋物線，其存在與唯一性並沒有加以證明而已。

今年的大學聯招，能夠有這樣的題目來考考新教材的精神，眞是值得喝采。只要充分了解辛浦森法的由來，這一個題目並不困難，其解法提供參考如下：

(1)因爲函數

$f(x)=ax^2+bx+c$ 需滿足

$f(\alpha)=\ell$，$f(\beta)=m$，

$f(\gamma)=n$，故得

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=\ell \\ a\beta^2+b\beta+c=m \\ a\gamma^2+b\gamma+c=n \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots(L)$$

而方程組 (L)（視 a，b，c 爲未知數）有唯一一組解的充要條件爲

$\triangle=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，今因 $\alpha<\beta<\gamma$，得

$$\triangle=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)\neq 0$$

故 a，b，c 存在且唯一

(2) $\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=\int_\alpha^\gamma(ax^2+bx+c)dx$

$=\frac{1}{3}a(\gamma^3-\alpha^3)+\frac{1}{2}b(\gamma^2-\alpha^2)+c(\gamma-\alpha)$

$=\frac{\gamma-\alpha}{6}[2a(\gamma^2+\alpha\gamma+\alpha^2)+3b(\gamma+\alpha)+6c]$

$=\frac{\gamma-\alpha}{6}[(a\alpha^2+b\alpha+c)+(a\gamma^2+b\gamma+c)+4(a(\frac{\alpha+\gamma}{2})^2+b(\frac{\alpha+\gamma}{2})+c)]$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}[(a\alpha^2+b\alpha+c)+4(a\beta^2+b\beta+c)+(a\gamma^2+b\gamma+c)]$$

（因 $\gamma-\beta=\beta-\alpha$　得 $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$）

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}(f(\alpha)+4f(\beta)+f(\gamma))$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}(\ell+4m+n)$$

對於辛浦森法有充分了解的同學，或許如下的作答仍可得高分：

根據辛浦森法知

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}(f(\alpha)+4f(\beta)+f(\gamma))$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}(\ell+4m+n)$$

像這樣的題目，不但夠水準，更能引導教學的正常發展，只要觀念淸楚，等於送分。絕沒有補習班所說的：百分九十九的考生拿不到分數，居心何在？

二、社會組試題

非選擇題塡充題第6題

展開 $(-2x+y^2+\frac{3}{2}z)^{10}$，合併同類項後，可得________個次數爲14的單項式。

對於學過三項式定理舊教材的考生來說，或許要比只學過二項式定理新教材的考生容易些，由三項式定理可得

$$(-2x+y^2+\frac{3}{2}z)^{10}$$

$$=\sum\frac{10!}{p_1!p_2!p_3!}(-2x)^{p_1}(y^2)^{p_2}(\frac{3}{2}z)^{p_3}$$

（式中 p_1，p_2，p_3 爲非負整數，且滿足 $p_1+p_2+p_3=10$）

$$=\sum\frac{10!}{p_1!p_2!p_3!}(-2)^{p_1}(\frac{3}{2})^{p_3}x^{p_1}y^{2p_2}z^{p_3}$$

故 $\begin{cases} p_1+p_2+p_3=10 & \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ p_1+2p_2+p_3=14 & \cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$

②－①　得 $p_2=4$　且 $p_1+p_3=6$

而 $p_1+p_3=6$ 之非負整數解的個數爲

$H^2_6=C^7_6=7$ 個

至於只學過新教材的考生，則可由重複組合的觀點來解之：

將 $(-2x+y^2+\frac{3}{2}z)^{10}$ 展開後，其單項式必形如

$$(-2x)^{p_1}(y^2)^{p_2}(\frac{3}{2}z)^{p_3}$$

$$=(-2)^{p_1}(\frac{3}{2})^{p_3}x^{p_1}y^{2p_2}z^{p_3}$$

式中 p_1，p_2，p_3 爲非負之整數，且需滿足

$$p_1+p_2+p_3=10$$

$$p_1+2p_2+p_3=14$$

其餘之解法同前。

對於本題中所使用的"單項式"一詞，不少的傳播媒體又大作文章，認爲課本在說明多項式時，並沒有提到單項式，因此將會引起考生的爭議，筆者要嚴正的指出，本題中所提到的單項式一詞，曾出現於基礎數學第四册，1-2節的例11.：「用 a，b，c 三個文字，可構成幾個形如 $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$（此處 α，β，γ 爲正整數或零）且次數爲10的單項式」；新聞報導雖有其自由，但我們希望報導的立場應該客觀、正確，才不致爲少數利益團體所控制，從而讓我們的教育迷失了方向！

—本文作者任教於中正預校—