# 教材、考題與學習心態

## ～76年大學入學考題（自然組數學）之回顧

賴敦生

## 壹、前 言

部頒高中數學教材編輯目的應是讓學生熟悉基礎數學後，淺嘗應用數學的用途，以培養學生有繼續升學深造的意願，這是教育的使命。大學入學考試則肩負鑑別學生學習能力，區分性向的責任，它促使學生儘速確定升學與否的抉擇，免除青年徬惶不知所措的困擾，教材與考題各有不同的目標，任務！

學生關心的事項是如何學好數學以便承受考試的鑑別，完成切身的志願，本文係以教學工作者之立場，回顧考題，反覆申述教材本意，並對以後考生學習心態提出個人感受，拋磚引玉，校正自己的見解，使教學正常，從而育天下英才得無愧於心，享人生之一樂，就此下筆。

## 貳、考題與教材之聯想

【子】(一)設 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 為三複數，且

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$=x^3-6x^2+3x+3$，則

1. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$
(A) 6 (B) $-6$ (C) 3 (D) $-3$ (E) 9

2. $\alpha\beta\gamma=$
(A) 6 (B) $-6$ (C) 3 (D) $-3$ (E) 9

解：

1* $\because x^3-6x^2+3x+3$
$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$

2* $\therefore \alpha+\beta+\gamma=6$，$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3$
$\alpha\beta\gamma=-3$

3* $\therefore$ 1.選(C)；2.選(D)

評論：

1° 根據部頒教本第一冊第一章曾論及二次方程式之根與係數關係，三次及以上則未提及，但是由二次展延至三次的推演應是輕鬆的，一般教學會自動補充。

2° 本題具有穩定考生情緒的作用，推測命題先生希望考生有正常心態，從容作答接受能力的自然鑑別，可謂用心周到。

3° 很多次大學入學考試的數學題目，一開始就是最簡題，考生們不要慌張，一定可以作答且得分，失去自信的同學不要輕言放棄，否則很吃虧。

(二)若 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 如同上述，設多項式

$$x^2+px^2+qx+r$$
$$=(x-\frac{1}{\alpha^2})(x-\frac{1}{\beta^2})(x-\frac{1}{\gamma^2})$$

，則

3. $p=$

(A) $-5$ (B) $5$ (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

(E) $-\frac{1}{9}$

4. $q=$

(A) $-5$ (B) $5$ (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

(E) $-\frac{1}{9}$

5. $r=$

(A) $-5$ (B) $5$ (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

(E) $-\frac{1}{9}$

解：

$$x^3+px^2+qx+r$$
$$=x^3-(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2})x^2+(\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2})x-\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

3. $p=-(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2})$

$$=-\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=-\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=-\frac{3^2-2(-3)\cdot 6}{(-3)^2}=-5$$ 選(A)

4. $q=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}=\frac{\gamma^2+\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{10}{3}$$ 選(D)

5. $r=-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{1}{\gamma^2}=-\frac{1}{(-3)^2}$

$$=-\frac{1}{9}$$ 選(E)

**評論：**

4° 以往的教材曾經以根之變換解答本題（解法略），當時爲解三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，利用根之變換簡化爲 $x^3+px+q=0$，從此解得（卡丹公式法）三根。

強化數學功能的新教材，堅守不述及根之變換的原則一路介紹高中數學，沒什麼不妥，僅在“統合下册”p.76 提及，並且靜靜的說明如何運用圖形的疊合判別實根的個數：

如：求 $3x^3+6x^2+5x+3=0$ 之實根數□

解：令 $y=3x^3+6x^2+5x+3$

$$=3(x+\frac{2}{3})^3+(x+\frac{2}{3})+\frac{13}{9}$$

取 $X=x+\frac{2}{3}$，$Y=y-\frac{13}{9}$，

得 $Y=3X^3+X$

由 $\begin{cases}Y=3X^3\\Y=X\end{cases}$ ＝圖形疊合建立 $Y=3X^3+X$ 之圖形

再看它與原來 $x$ 軸交點個數定出實根個數。

此類之演算（根之變換），由新教材走向似不熱門了。

5° 再次的演算，因流程相同，理論相同，解題心情自趨穩定愈做愈勇，信心大增。

6° 同學們上課要仔細聽講，並親自演習得到正確答案後，方表學習成功。

【丑】(一)點 $P(-2, b)$ 在曲線 $\Gamma$：$y = x^{10} - x^3 - 10x^2 - 1000$ 上，過 $P$ 點作 $\Gamma$ 之切線 $y = mx + k$，試求 $b$，$m$，$k$。（$2^{10} = 1024$）

6. $b =$

(A) $-8$ (B) $-6$ (C) $-2$ (D) $2$ (E) $4$

7. $m =$

(A) $-5098$ (B) $-5096$ (C) $-5094$ (D) $-5092$ (E) $-5090$

8. $k =$

(A) $-10192$ (B) $-10194$ (C) $-10196$ (D) $-10198$ (E) $-10200$

**解：**

6. 令曲線 $\Gamma$：$y = f(x) = x^{10} - x^3 - 10x^2 - 1000$

$\because$ 點 $P$ 在 $\Gamma$ 上，

$\therefore f(-2) = (-2)^{10} - (-2)^3 - 10(-2)^2 - 100$

$= -8 = b$

$\therefore$ 選(A)

7. 在 $P$ 點處曲線 $\Gamma$ 之切線的斜率

$m = f'(-2) = -5092$ ……選(D)

8. 點 $P(-2, -8)$ 在切線

$y = -5092 \cdot x + k$ 上

$\therefore -8 = -5092(-2) + k$

即 $k = -10192$ …………選(A)

**評論：**

7° 本題不得使用判別式求切線斜率，或用類似標準型之切線公式求解，它必須在充分了解導數意義並且還會運用 $2^{10} = 1024$ 現成之資料參與演算，才會獲致高效，高速得解的結果。題目本身就可提煉教材深刻意義，可鑑別考生之運算機智，並測出綜合思考能力。

8° 運算至此可領悟題意中上題對下題有導引思考的啓發作用，不必依靠艱苦記憶作答，最能穩定情緒，尤其分成小題選擇，等於分段給分，演算中途可對照答案，心中有數，不會迷航，安全感倍增，粗心同學可重拾自信，放心作答，不致失常。

(二)使用牛頓（切線）法一次（起始值取整數），可求得方程式 $x^{10} - x^3 - 10x^2 - 1000 = 0$ 一負根之近似值為

9. (A) $-2.0047$ (B) $-2.0032$ (C) $-2.0016$ (D) $-1.9984$ (E) $-1.9953$

(三)仿(二)，可求得上述方程式一正根之近似值為

10. (A) $2.0047$ (B) $2.0032$ (C) $2.0016$ (D) $1.9984$ (E) $1.9953$

**解：**

9. $\because f(-2) \cdot f(-3) < 0$

$f(-1) \cdot f(-2) > 0$

$\therefore$ 負根在 $(-3, -2)$ 之間。

依牛頓法在點 $(-2, f(-2)) = (-2, -8)$ 之切線爲：

$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$

即 $y = -5098(x + 2) - 8$

而當 $y = 0$ 時，

$$x=-2+\frac{8}{f'(-2)}\doteqdot -2.0016\cdots$$選(C)

10. $f(1)f(2)>0$，但 $f(2)f(3)<0$，
故正根在（2，3）之間。
在點（2，$f(2)$）之切線為：

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$
$$=5068(x-2)-24$$

當 $y=0$ 時，$x=2+\dfrac{24}{5068}\doteqdot 2.0047$

選(A)

**評論：**

9° “使用近似值來代替正確值是數學與其他科學所不能避免的現象”，新教材理科數學下册第一章就簡明扼要的描述求解各種近似值的方法、誤差範圍、精確度之計算方式，這是科學研究所必需的知識，新教材編輯本意就是讓讀者領略科技研究需用的數學，是一種自然需求的命題，不致是人工設計方便作秀之詭異習題的傳授。我們勢需詳研、精讀這套教材。

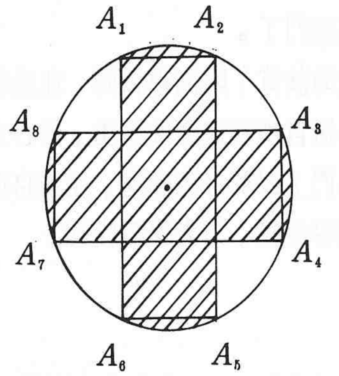
10° 本題架構精明，結合導數、斜率之觀念，追問考生切線在 $x$ 軸之截距是高次方程式實根近似值是否知悉；這貫穿理科數學上下册教材的命題把考生徹底的鑑別，還把不知學習動機的考生導入教育的終站——數值方法。

11° 我們同學今後研習數學要留意觀念整合，精研推理架構，數值計算要有耐心，不能排斥方會有好成績。

## 第二部分非選擇題

### 一、填充題

1. 如圖，$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_8$ 等八個點，依次將圓周八等分。若圓半徑為1，則線段 $A_1A_2$ 長為(甲)，斜線部分面積為(乙)。

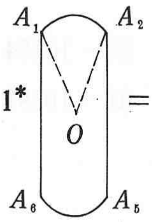
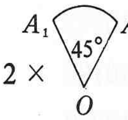
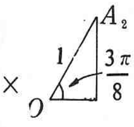


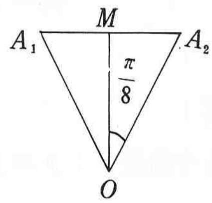

**解：**

設圓心為 $O$，$\overline{A_1A_2}$ 之中點 $M$，所對圓心角 $\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

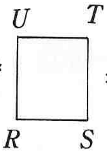
(甲) $\overline{A_1A_2}=2\overline{A_1M}=2\cdot\overline{OA_1}\sin\dfrac{\pi}{8}$

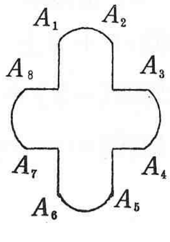
$$=2\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

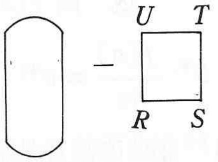
(乙) 1*  $=2\times$  $+4\times$ 


$$=2\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}+4\times\frac{1}{2}$$
$$\times\left(1\cdot\cos\frac{3\pi}{8}\ \sin\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2*  $=\overline{RS}^2=\overline{A_1A_2}^2=2-\sqrt{2}$


3* 所求＝ 

$= 2 \times$ 


$= \dfrac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 2$ ……………答

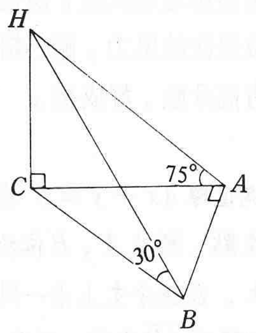
2. 某人自塔底 $C$ 正東平地上一點 $A$，仰視塔頂 $H$，測得仰角 $75°$，向南行 $\dfrac{30}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}$ 公尺至 $B$ 點，仰視 $H$ 測得 $30°$，則塔高 $\overline{CH}$ 為(丙)（假設 $\overline{CH}$ 垂直於地面），而 $\cos(\angle\overline{ACB}) =$ ＿(丁)＿。

解：

1* $\cos\angle ACB = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{CH}\cot 75°}{\overline{CH}\cot 30°}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$ ……………(丁)

2* $\because \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$




$\therefore (\overline{CH}\cot 75°)^2 + \left(\dfrac{30}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}\right)^2 = (\overline{CH}\cot 30°)^2$

$\therefore \overline{CH}^2 = \dfrac{900}{(\sqrt{3}+1)(\cot^2 30° - \cot 75°)}$

即 $\overline{CH} = \dfrac{15}{2}\sqrt{2}$ ……………(丙)

**評論：**

12° 三角函數是一種演算工具，教本編寫就以實際的測量問題顯露三角函數的用途，當我們熟悉半角、倍角、特別角函數值時不應就此滿足，而要據此公式求解其他的實際問題才是學習完成。

13° 此二題題意淺題易懂，能瞬間掌握思考方向，不論高低程度的考生都能入神演算，熱切尋求解答。

14° 平時準備應以親自計算爲貴，光靠聽講研判解題策略不眞實求算是不實際的學習，臨考作答錯誤百出是不能避免。

3. 若 $a < b$ 為二實數，令 $(a, b) = \{x \mid x$ 為實數，$a < x < b\}$。若將不等式 $2\log 2 + \log(x^2 - 5x + 3) < 2\log(12 + 5x - x^2)$ 的解集合表為 $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$，其中 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$，則 $(a_1, b_1) =$ ＿(戊)＿，$(a_2, b_2) =$ ＿(己)＿。

解：

1* 眞數爲正數 $\begin{cases} x^2 - 5x + 3 > 0 \\ 12 + 5x - x^2 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \text{ or } x < \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \\ \dfrac{5-\sqrt{73}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{73}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{73}}{2} < x < \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

or $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$ …… ①

2* 化簡原式 $\log 2^2(x^2 - 5x + 3) < \log(12 + 5x - x^2)^2$

log 爲遞增函數

$\therefore 2^2(x^2 - 5x + 3) < (12 + 5x - x^2)^2$

3* 演算特技：

$4(x^2 - 5x + 3) < (x^2 - 5x)^2 - 24(x^2 - 5x) + 144$

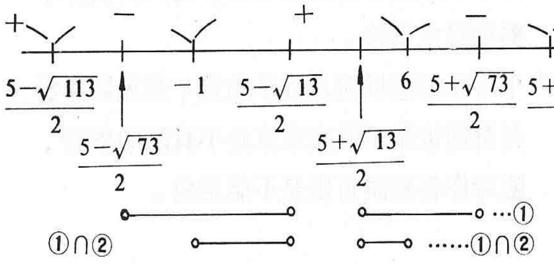
即 $(x^2 - 5x)^2 - 28(x^2 - 5x) + 132 > 0$

$(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x - 22) > 0$

$(x+1)(x-6)\left(x - \dfrac{5+\sqrt{113}}{2}\right)(x$

$$-\frac{5-\sqrt{113}}{2})>0 \cdots\cdots\cdots\cdots② $$

*4. ……②




$$\therefore -1<x<\frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{or}\quad \frac{5+\sqrt{13}}{2}<x<6$$

(戊) $\left(-1,\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$

(己) $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},6\right)$

**評論：**

15° 關於指數、對數函數之補充習題相當精彩豐富，相信每一個考生都演練過爲數不少的課外習題，除了應付考試外，它的數學功能是什麼？就我們高中層次內所能理解的可從教材理科數學上册 p.228 例 6 窺看出來，玆列舉如下：

“細菌在適當的環境下繁殖的速度與當時的細菌數成正比，意思是說，若在時刻 $t$ 時的細菌數爲 $f(t)$，則在時刻 $t$ 時的細菌增加率 $f'(t)$ 與 $f(t)$ 成正比，假設 $t=0$ 時的細菌數爲 $n_0$，而 $f'(t)$ 與 $f(t)$ 的比值爲 $k$ ( $k>0$ )，求時刻 $a$ 時的細菌數 $f(a)$。”

**解：**

1* $\because \dfrac{f'(t)}{f(t)}=k$

$$\therefore \int_0^a \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt=\int_0^a k\,dt$$

2* 即 $\ln f(t)\big|_0^a=ka$，

或 $\ln f(a)-\ln n_0=ka$

3* $\dfrac{f(a)}{n_0}=e^{ka}$ 故 $f(a)=n_0e^{ka}$。

提示：1** 細菌的數量是時間的一個指數函數 $n_0e^{kt}$。

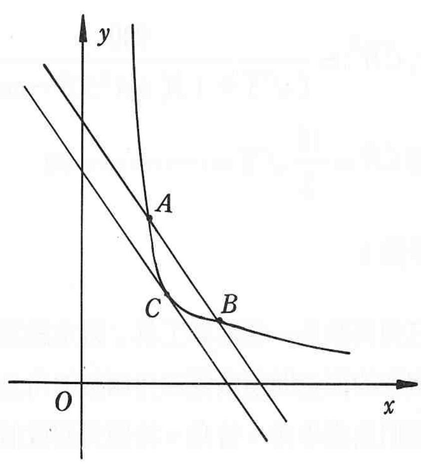
2** 以指數函數描述細菌的數量遠比其他函數的預估值要準確而合理得多。

3** 指數函數有如此優秀功能，其反函數對數函數自不例外，怪不得基礎數學相當重視對、指數的人工造題訓練，有其道理。

**評論：**

16° 本題爲綜合性命題，測試考生是否理解對數定義，遞增函數的特徵，是否具備不等式快速又準確的演算能力，過程並非離奇曲折，但能立即確定策略，做有目的的下意識解答，考生可能要花甚多時間反覆驗算，也許沒有解出正確解答又影響別題思考，甚至整份考題成績。研習數學眞的要培養明敏果決的思力，耐心精細，快速精算才會有高分數，好成績。

4. 設 $A$，$B$ 為直線 $4x+y=5$ 與雙曲線 $xy=1$ 的兩交點。顯然 $A$，$B$ 位於該雙曲線的同一分支上。在該分支上求一點 $C$，使雙曲線在 $C$ 的切線與 $\overline{AB}$ 平行，則 $C$ 的坐標為 __(庚)__，$\Delta ABC$ 的面積為 __(辛)__。



解：

$1^*\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=5-4x \end{cases}$ 之公解為 $A$，$B$ 二交點之坐標。

$\Rightarrow A(1,1)$，$B(\dfrac{1}{4},4)$。

$2^*$ 平行直線 $AB$ 之切線的斜率為 $-4$

令 $y'=-\dfrac{1}{x^2}=-4 \quad \therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$

$\therefore C$ 點之坐標為 $(\dfrac{1}{2},2)$

（與 $AB$ 在雙曲線同一分支上）……㈣

$3^*$ $\Delta ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & 4 \\ \dfrac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|=\dfrac{3}{8}$…㈥

評論：

17° 教本關於錐線解說是從二元二次方程式之九種圖形逐一舉例，再由錐線定義寫出方程式，兩相印證，錐線是二元二次方程式，以此結構體乎敘錐線特徵，讓 16、17 歲智齡學生感覺津津有味，當然高智力、高興趣考生可從習題中洞悉舊教材有關錐線豐富的補充題，而熟悉教科書的考生自然有能力在大學深造。

18° 本題思考，決策難易適中，不需死記冷僻公式即可解答，平日用功同學更覺得心應手，舒適無比。

19° 今後學習得根據教本虛心踏實演算，這類純教學用的試題經常出現，多予準備，必有收穫。

5.(1)連續拋擲銅板 4 次，出現偶數次（包括零次）正面的機率為㈩。

(2)連續拋擲銅板 10 次，如果已經知道前面的 4 次中出現了偶數次（包括零次）正面，那麼全部 10 次拋擲中出現 6 次正面的條件機率為㈩。

解：

(1) 四反面　二正二反　四正面

$----$，$++--$，$++++$

$(\dfrac{1}{2})^4+C^4_2\cdot(\dfrac{1}{2})^2(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{2}$ ㈩

(2) $1^*$ 令 $A$ 表10次投擲中前 4 次出現了偶數次（含零次）正面之事件則

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

$2^*$ $B$ 表10次投擲中有 6 次正面之事件

$A\cap B$：$\begin{pmatrix}\text{前 4 次後 6 次}\\ \text{0 正　6 正}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}\text{前 4 次後 6 次}\\ \text{2 正　4 正}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}\text{前 4 次後 6 次}\\ \text{4 正　2 正}\end{pmatrix}$

$3^*$ $P(A\cap B)=(\dfrac{1}{2})^4\cdot(\dfrac{1}{2})^6$

$+C^4_2\cdot(\dfrac{1}{2})^2\cdot(\dfrac{1}{2})^2\cdot C^6_4\cdot(\dfrac{1}{2})^4\cdot(\dfrac{1}{2})^2$

$+(\dfrac{1}{2})^4\cdot C^6_2\cdot(\dfrac{1}{2})^2(\dfrac{1}{2})^4$

$=106\cdot(\dfrac{1}{2})^{10}$

$4^*$ $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{106\cdot(\frac{1}{2})^{10}}{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{106}{2^9}=\dfrac{53}{2^8}=\dfrac{53}{256}$………㈩

評論：

20° 教材編輯先生以自然生動筆力深入淺出敘

述排列組合與機率這一部份，並學出各種思考必備的基本方式讓學生接納，其間陳述輕鬆有趣，不覺繁雜、認眞學習、受益良多。

21° 可從明確題意沿着機率定義辨別思路，尋求解題架構，再由敎本中普通排列組合的基本方法計算答案不會困難。

22° 本單元有很多是遊藝性不知具何種價值的參考習作，演算不完，負擔沉重，不知如何是好，相當困擾，此種題型之出現，我們更自信，今後學習只須固守敎本內容，熟悉各種方法，精思細算，再以平常心接受升學測試，不致落敗。

二、設 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，試求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ -a^3 & 1 & -a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ -a & a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

之值。

解：

1* $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow a^4=\cos 4\cdot\dfrac{\pi}{4}+i\sin 4\cdot\dfrac{\pi}{4}=-1$

2* $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ -a^3 & 1 & -a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ -a & a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} a^3 \\ -a^2 \\ a \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2a \\ 0 & 2a^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & 2 & 2a \\ 2a^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$=-8a^4=-8\cdot(-1)=8$ ………答

評論：

23° 從方程式 $x^2=-1$ 發覺虛數後，建立複數系使二次方程式之根的解法有圓滿之結局，五次或五次以上的方程式求解公式不存在，在敎科書中有明確的敘述，一般方程式實根求解可由勘根定理及牛頓法找根之近似值，尙有利用複數之極式，棣莫夫定理求實數之 $n$ 次方根等等均詳列在敎本上，讀者可知悉。

行列式之降階演算出現在理科數學下册第二章，主題介紹求解多元未知數的一次方程組需引進系統化的方法～高斯消去法（電子計算常用），從此產生矩陣運算及其功能，在簡明扼要的陳述中讓讀者享受電流分佈之克希荷夫定律，生產消費的里昂提夫輸出入模式……之數學實用意義，研習數學終於有了歸宿，幸哉！

24° 考生經過長程跋涉這廣大的敎程，有否迷失航向，可由本題鑑別，因它選擇其中最精彩的演算藝能編爲考題，儘可測知考生是否認知棣莫夫定理，行列式降階之交錯運算智能，這題精心佈局，相當美好。

25° 硏習敎本的心態應該將分散在各章節的有關知識，結合起來，研究它一貫的道理，作成結論，這樣細細的品嘗課程道理、敎材結構，參加鑑試，不致失誤。

三、設 $L_1$ 為兩平面 $E_1$：$2x+y-z=3$ 與 $E_2$：$2x+2y-z=4$ 的交線，$L_2$ 為兩平面。

$E_3$：$x-2y=-2$ 與 $E_4$：$x-3y-z=-1$ 的交線。

試證明 $L_1$ 與 $L_2$ 相交而且互相垂直。

解：

1* $L_1$：$\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$ 之方向量

$$\overrightarrow{u_1}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}\right)$$

$L_2:\begin{cases}x-2y+0\cdot z=-2\\x-3y-z=-1\end{cases}$ 之方向量

$$\overrightarrow{u_2}=\left(\begin{vmatrix}-2&0\\-3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\1&-3\end{vmatrix}\right)$$

即 $\overrightarrow{u_1}=(1,0,2)$　$\overrightarrow{u_2}=(2,1,-1)$

2* $u_1\cdot u_2=1\times 2+0\times 1+2\times(-1)$
$=0$

$\therefore u_1\perp u_2$ 而 $L_1\perp L_2$

3* $\begin{cases}2x+y-z=3\cdots\cdots①\\2x+2y-z=4\cdots\cdots②\\x-2y=-2\cdots\cdots③\\x-3y-z=-1\cdots\cdots④\end{cases}$

①－②　$-y=-1$ 得 $y=1$ 代入③得
$x=0$，$z=-2$　滿足③，④

故 $L_1$，$L_2$ 相交於點 $(0,1,-2)$

**評論：**

26° 理解空間幾何至空間坐標系、向量後，方程式與圖形交相解釋，教科書描寫得相當細緻，使用思考方法亦簡明易於學習，具空間概念的考生這一章會學得很滿意，解題能力比任何章節更自信。

27° 這是熱門的基本考題，在教科書的指引下即可臨場隨機思考，不必使用特技，當有收穫。

四、設有三數 $\alpha>\beta<\gamma$，且 $\gamma-\beta=\beta-\alpha$，而 $\ell$，$m$，$n$ 為任給的三個實數。

1. 試證明：存在唯一的一組實數 $a$，$b$，$c$，使得函數
$f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足了
$f(\alpha)=\ell$，$f(\beta)=m$，$f(\gamma)=n$。

2. 記 $\int_\alpha^\gamma f(x)dx=S$。試用 $\alpha$，$\gamma$ 及 $\ell$，$m$，$n$ 表示 $S$，並證明之。（$S$ 式中不得含有 $a$，$b$，$c$ 或 $\beta$）

**解：**

(1) 1* $\because\begin{cases}f(\alpha)=\ell\\f(\beta)=m\\f(\gamma)=n\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a\alpha^2+b\alpha+c=l\\a\beta^2+b\beta+c=m\\a\gamma^2+b\gamma+c=n\end{cases}$

2* 又：$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha^2&\alpha&1\\\beta^2&\beta&1\\\gamma^2&\gamma&1\end{vmatrix}$
$=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\neq 0$
$(\because\alpha<\beta<\gamma)$

$\therefore$“*1.”中之 $a$，$b$，$c$ 恰有一組解。

即 $a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}$，$b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}$，$c=\dfrac{\Delta_c}{\Delta}$

而 $\Delta_a=\begin{vmatrix}\ell&\alpha&1\\m&\beta&1\\n&\gamma&1\end{vmatrix}$，

$\Delta_b=\begin{vmatrix}\alpha^2&\ell&1\\\beta^2&m&1\\\gamma^2&n&1\end{vmatrix}$，

$\Delta_c=\begin{vmatrix}\alpha^2&\alpha&\ell\\\beta^2&\beta&m\\\gamma^2&\gamma&n\end{vmatrix}$。

故存在唯一的一組 $a$，$b$，$c$ 使 $f(\alpha)=\ell$，$f(\beta)=m$，$f(\gamma)=n$ 成立，故得證。

(2) $S=\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma(ax^2+bx+c)dx$

$=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx\Big|_\alpha^\gamma$

$=\dfrac{a}{3}(\gamma^3-\alpha^3)+\dfrac{b}{2}(\gamma^2-\alpha^2)+c(\gamma-\alpha)$

$=\dfrac{\gamma-\alpha}{6}[2a(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+3b(\gamma+\alpha)$
$+6c]$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}\left[(a\alpha^2+b\alpha+c)+(a\gamma^2+b\gamma+c)+4\left[a\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2+b\cdot\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+c\right]\right]$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}\left[\ell+4m+n\right]\text{……………答}$$

**評論：**

28° 深悉存在、唯一之數學意義的考生，順着題意必能研判這是三元一次方程組公式解法（基礎數學第三冊 p.82）的化身，他知道憑着 $\Delta \neq 0$，即可判定 $a$，$b$，$c$ 有解且唯一，並且將 $a$，$b$，$c$ 用已知數 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 來表示就是證明完成。

數學研習不能只注重演算求值，證明等式，那存在和唯一的意義要深切體驗，舊教材實驗本要建立無理指數是存在且唯一，行列式演算是合理（存在）且值唯一，那 S.M.S.G 教材就是一角的平分線是可求得的（存在且唯一）都有詳細的說明，讓人五體投地的信服，而沒有“你吹牛”的心思，這是存在唯一教學嚴密訓練的一部份，新教材現今已簡化，但仍很重視，我們同學應多注意。細細的推測教本隱藏的意義，才能享受數學的美感。

29° 本題考驗存在唯一的意識，顯活三元一次方程組公式解法的意義，精心佈局，是一記漂亮長打，提醒今後存在、唯一演習的重要性。

30° 理科數學從函數、極限、導數到微分、積分之應用都有詳盡的說明，容易閱讀，尤其舉出科學研究的例題顯示微分、積分功能和數值方法中用近似值理論值交相比對驗證，叫人讚佩描述的技巧，情結感人，使學生亦樂於學習，效果良好，自必是充分準備，意得高分。

31° 第 2 小題一開始的積分很容易，但要演算至結果以 $\ell$，$m$，$n$ 表示恐非易事，況時間不怎麼允許，除非先做此題，相信多數的考生演算至中途會停筆的。

32° 第二小題演算工程不小，是很費力，不過亦可鑑別考生的機智、經驗，因為演算終點為 $\ell$，$m$，$n$ 表示式，所以儘力推演成 $a\alpha^2+b\alpha+c$，$a\beta^2+b\beta+c$，$a\gamma^2+b\gamma+c$，再換回 $\ell$，$m$，$n$ 這是有目的的壓迫性演算的題型，平日愛好解題的考生是可解出來的。

## 叁、結　語

教材編輯描述高中數學已走出傳統的基礎世界，今後要踏實的研修基礎計算，進而理解科技研究究竟用到何種數學功能，讓讀者遊藝數學演算有其歸宿，學習高中數學不只可以參加升學鑑別考試，還可欣賞數學功能的崇高價值，眞是幸運。

一份作答時間 80 分鐘的考題，期求它反映高中三年的教材，要盡善盡美，人人稱讚頗不容易，今年大學入學考題（自然組數學）可以領略的是平時要虛心學習，踏實演算，精確求值，不需強記冷僻公式，特殊技巧就能作答，研讀教科書除了精通單元課程外，尙得理解編輯教材之長程架構，掌握住教材本意後，承受這份考題的鑑別，倍覺思考容易，企劃分明，解題迅速，頻頻得分。

一分努力，一分收獲，平日細心追隨教本，耐心演算養成習慣的考生，今日面臨考題必可體會“皇天不負苦心人”是永恒的道理。

—本文作者任教於建國中學—