從解題的認知活動層次和命題旨意析評七十六年大學聯考自然組數學科試題

楊大衛
李　瑞
林威廉

壹、前言

每年聯考一過，各科聯考試題總是引起不少批評與討論，其中數學科尤是倍受關注。由於多年來見諸報章雜誌的聯考試題分析，多半偏重試題解答、考題內容比重與各册分布狀況，論斷命題好壞也是主觀見解居多，鮮有客觀系統分析架構與評量數據。我們這一篇分析，就是嘗試滙集多人力量，建立一套較爲客觀的聯考數學試題分析模式，以供來日進一步發展數學試題難易度評量指標。

貳、分析架構

我們的分析着重在兩部分，一是解題認知活動層次（以下簡稱題質層次），指解題過程中，所牽涉到的最高認知活動層次；一是命題旨意，指命題內容要甄測那些數學能力。

題質層次分析，我們借用Bloom 氏的認知領域目標六層次分類——知識、理解、應用、分析、綜合、評鑑，這一種評量架構，也是師大科教中心評量學習成就所推廣使用的。（註一）這一部分的分析，可看出試題的難易度。命題旨意方面，我們從數學的教育目標重點——理解概念、訓練操作能力（演算）、培養分析與組織能力（邏輯建構能力），抽理出「概念

甄別力」、「計算能力」、「建構能力」作爲分析項目。由於大學聯考是屬於總結性鑑定測驗性質，聯考數學試題之目標即在掄取有適當數學能力的高中畢業生進入大學深造，因此，理想的聯考命題內容應能反映所要甄測的能力，這也是我們把命題旨意列爲分析重點的原由。尤其在聯考影響教學走向下，透過命題旨意這一部分的分析，可看出試題所要甄測的數學能力是否有所偏頗？它有無偏導數學教學正常化的傾向？

爲方便大家了解，茲將我們的分析項目簡要說明如下：

(A)**題質層次**：分析每一題解題活動過程中所牽涉到的認知層次，共分六層次。

1.00 **知識**：指學生能以回憶或再認的方式，對學過的知識概念有所記憶。可細分爲

1.10 個別或特定事物的知識：

1.11 術語知識：如複數；∪，≤。

1.12 個別事實知識：如△內角和＝180°（度量事實）；△外角等於兩對應內角和（關係事實）。

1.20 處理事物方法的知識：

1.21 慣例的知識：處理數學事實資料所依循的方式。如直角坐標點表示法；行列式基本運算性質。

1.22 趨勢和順序知識：趨勢如曲線變化（斜率）判斷；順序如 sin ， cos ， tan 的值域變化判斷。

1.23 分類知識：即範疇辨識，如函數圖形對應辨識。

1.24 規準知識：判斷數學關係成立的準則或條件。如平行或共線成立條件判斷；△全等判斷。

1.25 方法知識：對數學方法的概括認識。如牛頓法。

1.30 普遍或抽象的知識：可用以廣泛解決問題的。

1.31 原理、通則知識：如大數法則。

1.32 理論、結構：如堪根定理。

2.00 **理解**：指把握所學知識意義內涵的能力。可細分爲：

2.10 轉譯：即變換表達方式的能力。如由數據製成圖表。

2.20 解釋：辨認、提出訊息所含結果的能力。如判別圖形間的異同或關係；正確使用公式、定理。

2.30 推論：超出給定的訊息，作正確應用和擴展的能力。如根據所得數據，推定其必然的結論。

3.00 **應用**：指把所學的知識應用於新的情境或現實情況的能力。通常必須對新情境有所領悟，才能選取適合的相關知識來應用。

3.10 科學技能的應用：如使用電腦套裝軟體製作圖表。

3.20 原理或法則的應用：如選取適合的定理證明幾何問題。

4.00 **分析**：指掌握新情境，理出未明確描述的現象或其構成要素間的組合關係或原理，進而選取相關的知識來解決問題的能力。

4.10 要素的分析：指出組成整體的各要素。

4.20 關係的分析：指出假設與結論間相互關係。

4.30 原理的分析：指出事實或過程的組織原理。

5.00 **綜合**：將所學知識綜合爲新的整體的能力。

5.10 要素合成：以一種方式將要素組成一種較清晰的結構，如撰寫報告的能力。

5.20 方案設計：如提出考驗假設途徑的能力。

5.30 命題衍生：如從事數學的發現與概化的能力（也即建立數學模型的能力）

6.00 **評鑑**：對知識價值作判斷的能力。

6.10 內證批判：依內部證據評斷，如指出論證中的邏輯謬誤。

6.20 外規評量：依外在標準來判斷，即就所要評鑑的事物或現象，選取或自行建構可資評鑑依據的模型或規準，並進行評量操作。

(B)**命題旨意**：即分析每一題要考考生那些能力？單純數學概念的理解？抑兼考考生的計算能力、邏輯分析與組織能力？理想的大學數學聯考試題，我們認爲除了測試考生的數學概念甄別理解能力外，還應包括計算能力與分析建構能力。

1.概念甄別力：指對試題所考的概念能夠甄別理解的能力。我們祇分析所考的概念內容別以及有無整合性。

①實質概念：指解該題時，實際要用到那些數學概念。

②概念整合性：指所考的概念，解題時是否牽涉到不同範疇概念的整合。

2.計算能力：指解題時除了要能甄別理解所考概念外，還必須對式子有完整的計算能力。

3.建構能力：指解題時除了甄別理解所考概念外，還必須運用邏輯方面的分析與組織能力。

參：分析作業規則

分析的工作，我們採取集體合作的方式，先是討論確立分析的架構與評量標準（註二），全部考題我們三個人都事先做過，然後再一起進行逐題討論，最後均以取得完全一致觀點作爲定案。在題質層次方面，遇有解法不一致時，我們採取從易、從正常（指依新教材正常教學）爲原則，但我們會附加說明有別解。解法相同，則確立解題必經的重要步驟，取得一致後，再評定各步驟所牽涉的認知活動層次，以層次最高的那一步驟，作爲該題題質層次，也即題質層次的標定，我們是比較各解題重要步驟後，採取從高原則而不是加總。又一題中如分爲兩小題，我們係以小題爲單位分別評量。後一小題如需用到前面小題所求得的資料，則前面小題的解題步驟，也必須一併納入後一小題考慮。此外題質層次係以前面分析架構中所標示的爲準。

在命題旨意方面，概念甄別力一項，我們先把解題過程中，實際要用到的數學概念內容名稱標出，再判斷解題時需不需要用到概念之間的整合。整合性確定後只標定有無，不另給定權值。由於解法不同，所牽涉到的數學概念可能有異，因此所標示的實質概念以及概念整合性，我們是依循題質層次的解法步驟而來。「計算能力」與「建構能力」是指解題中要用到的技巧，看是否需要用到計算能力或建構能力，或者同時要兼用兩項能力。有關這兩項能力的分析，也僅是標示有無，不另給定權值。

逐題討論題質層次與命題旨意當中，我們總忘不了從考生立場——亦即揣測考生面對考題可能的反應，來一番檢討性質疑。我們所提出的命題技巧綜合評議，除了根據我們的分析結果立論外，有一部分即是此種質疑下所得出的意見。我們此回分析聯考試題，也就是希望言之有物、言之有據，但願這一項綜合評議，能獲得聯招會命題委員們的重視。以下就是我們分析與討論的結果。

肆、解法步驟與題質層次

關於這次聯考，當然每一個題目可能有兩個或兩個以上的解法。除了依照前述的從易原則外，我們希望是每個題目儘可能地提出它們最正常的想法途徑，而依循這個思想的建構來提出解答。

第一部分：選擇題

〔子〕㈠ 設 α，β，γ 為三實數，且 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-6x^2+3x+3$，

則 1. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$ (A) 6 (B) -6 (C) 3 (D) -3 (E) 9

2. $\alpha\beta\gamma=$ (A) 6 (B) -6 (C) 3 (D) -3 (E) 9

〔解法步驟〕：	〔題質層次〕:〔註：每一步驟的題質層次以（ ）表之〕
① $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ ② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ $\alpha\beta\gamma=-3$ 故第 1 小題選(C) 第 2 小題選(D) 〔另解〕可用根與係數求解	①本題解法過程中，是做(a)多項式的展開整理(b)多項式相等的規準知識，透過係數對應，比較得解，兩者都是知識性活動。因此，第 1，第 2 題均爲（ 1.24 ）。 ②另解使用根與係數的關係，是屬推論（ 2.30），依從易原則，捨去。

〔子〕㈡ 若 α，β，γ，如同上述，設多項式

$$x^3+px^2+qx+r=\left(x-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(x-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(x-\frac{1}{\gamma^2}\right) \text{ 則}$$

3. $p=$ (A) -5 (B) 5 (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$ (E) $-\frac{1}{9}$

4. $q=$ (A) -5 (B) 5 (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$ (E) $-\frac{1}{9}$

5. $\gamma=$ (A) -5 (B) 5 (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$ (E) $-\frac{1}{9}$

〔解法步驟〕：

① $(x-\frac{1}{\alpha^2})(x-\frac{1}{\beta^2})(x-\frac{1}{\gamma^2})$

$=x^3-(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2})x^2+(\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$

$+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2})x-\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

② $-p=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$

$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$=\frac{3^2-2(-3)(3)}{(-3)^2}=5$

$\therefore p=-5$ 第4小題選(A)

③ $q=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}$

$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$=\frac{36-6}{(-3)^2}=\frac{10}{3}$ 第2小題選(D)

④ $-\gamma=\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{1}{9}$

$\therefore \gamma=-\frac{1}{9}$ 第5小題選(E)

〔另解〕：可使用根的變換求解

〔題質層次〕：

①本題同上仍是展開整理，係數比較，是規準的知識（1.24）

②(3)(4)兩題運算稍有變化，通分之後有一小小公式：平方和＝和平方－兩倍兩相乘積，是對方法技術的認識與使用，屬於方法的知識（1.25）

③依從高原則第3題（1.25），第4題（1.25），第5題（1.24）

④另解使用根的變換，非新教材範圍，依“從正常”原則，捨去。

〔丑〕(一) 點$P(-2、b)$在曲線Γ：$y=x^{10}-x^3-10x^2-1000$上，過P點作Γ之切線 $y=mx+k$ 試求b，m，k（$2^{10}=1024$）

6. $b=$ (A) -8 (B) -6 (C) -2 (D) 2 (E) 4

7. $m=$ (A) -5098 (B) -5096 (C) -5094 (D) -5092 (E) -5090

8. $k=$ (A) -10192 (B) -10194 (C) -10196 (D) -10198 (E) -10200

〔解法步驟〕：

① $x=-2$代入原方程式

$b=(-2)^{100}+(-2)^3-10(-2)^2-1000$

$=-8$ 第6小題選(A)

② $y'=10x^9-3x^2-20x$ 以$x=-2$代入

$m=y'|_{x=-2}=10(-2)^9-3(-2)^2-20$

〔題質層次〕：

①第一個概念是“點在圖上”應屬術語的知識（1.11）

②緊接動作是“點代入”由於無需“列式”故只屬規準的知識，（1.24）

③依從高原則第6題（1.24）

$= -5092$

第7小題選(D)

③利用點斜式

$y+8=-5092(x+2)$

$\Rightarrow y=-5092x-10192$

$\therefore k=-10192$

第8小題選(E)

④本題有爭議者，可能擴張解釋第1、2動作之間有幾何（點在圖）與代數（點代入）的轉譯動作，似可標2．10，但因無改寫，列式只標（1.24）

⑤(1)切線需找斜率是爲範疇辨識（1.23）

(2)斜率需用導數是爲理解（2.10）（因理解後此活動才有意義）

(3)依從高原則第7題（2.10）

(1) k 值求取僅需代入動作（1.24）

(2)由於與第7題同時成立，因此第8題（2.10）

〔丑〕(二) 使用牛頓（切線）法一次（起始值取整數），可求得方程式 $x^{10}-x^3-10x^2-100=0$ 一負根之近似值為

9.(A) -2.0047 (B) -2.0032 (C) -2.0016 (D) -1.9984 (E) -1.9953

〔解法步驟〕：

①令 $f(x)=x^{10}-x^3-10x^2-1000$

$f(0)<0$

$f(-1)<0$

$f(-2)<0$

$f(-3)<0$

依勘根定理，知有一負根介於 -2 及 -3 之間，取 -2 爲初始值。

②求 $f(x)$ 在 $x=-2$ 的切線，依〔子〕(一)之計算結果知其爲：

$y=-5092x-10192$

③令 $y=0$　$x=-2.0016$

第9小題選(C)

〔題質層次〕：

①首先心靈影像應理解牛頓法（2.10）

②理解後探知要先求起始值（解釋）（2.20）

③起始值應用霍納法或勘根定理，面對線索選擇（應用）（3.20）

④剩下的求導數及代入，（1.24）

⑤綜合上述依從高原則，第9題（3.20）

〔丑〕(三) 仿(二)可求得上述方程式一正根的近似值為

10. (A) 2.0047 (B) 2.0032 (C) 2.0016 (D) 1.9984 (E) 1.9953

〔解法步驟〕：

①$f(0)<0$

$f(1)<0$

$f(2)<0$

$f(3)<0$

知有一正根介於2與3之間，取2爲初始值。

〔題質層次〕：

①想法過程完全同上題翻版、操作，應是（3:20）

②起始值改＋2而已。

②$f(2)=-24$

$y'=10x^9-3x^2-20x$

$y'|_{x=2}=5068$

切線方程式：$y+24=5068(x-2)$

$\Rightarrow y=5068x-10160$

③令 $y=0$

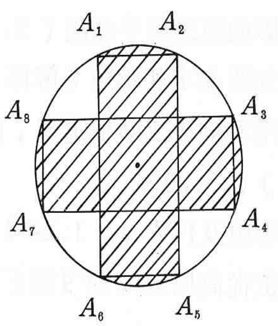
$x=2.0047$

第10小題選(A)

第二部分：非選擇題

一、填充題

1.如圖A_1，A_2，……，A_8 等八個點依次將圓周八等分。若圓半徑為1，則線段 A_1A_2 長為＿＿＿＿＿＿，斜線部份面積＿＿＿＿＿＿。



〔解法步驟〕：

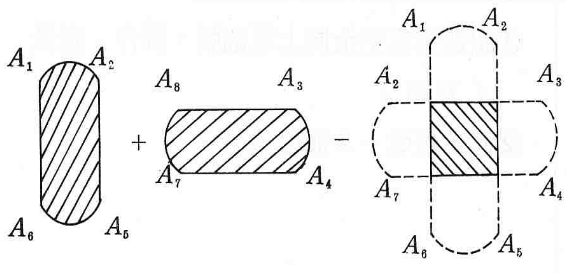
①$\overset{\frown}{A_1A_2}$ 所對之圓心角為 $\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

②利用餘弦定理：

$$\overline{A_1A_2}^{\,2}=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\frac{\pi}{4}=2-\sqrt{2}$$

$\therefore\overline{A_1A_2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ㈣之答為$\sqrt{2-\sqrt{2}}$

③斜線部份面積為



〔題質層次〕：

㈣①八等分圓有轉譯求圓心角的動作(2.10)

②選擇使用正弦或餘弦屬應用(3.20)

③公式代入計算屬規準的知識(1.24)

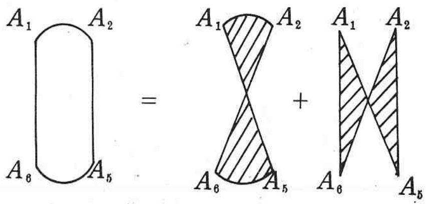
④本題為(3.20)

㈤①本題使用扇形面積及三角形面積公式皆為正確的使用公式(2.20)

②重點在圖形的分割，加減相輔的選擇判定，需對整個圖形各要素作分析、組合後，才能處理新情境是要素的分析(4.10)

③本題為(4.10)

④



$$= 2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑤∴斜線面積的實際值應爲

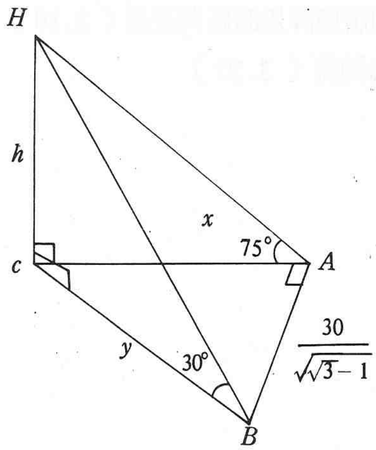
$$2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2-\sqrt{2}}^{\,2}=\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$$

故(乙)之答爲$\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$

2. 某人自塔底C正東平地上一點A，仰視塔頂H，測得仰角為75°，向南行$\frac{30}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}$公尺至$B$點，仰視$H$測得30°，則塔高$CH$為(丙)（假設$\overline{CH}$垂直於地面）而 $\cos(\angle ACB)=$ (丁)

〔解法步驟〕：

①依題意可將本文轉爲圖形如下：



$$②\ (h\cot 30^\circ)^2-(h\cot 75^\circ)^2=\frac{900}{\sqrt{3+1}}$$

$$h^2\left[3-\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2\right]=\frac{900}{\sqrt{3}+1}$$

$$h^2\left[3-(2-\sqrt{3})^2\right]=\frac{900}{\sqrt{3}+1}$$

$$4h^2(\sqrt{3}-1)=\frac{900}{\sqrt{3}+1}$$

$$\therefore h^2=\frac{225}{2} \qquad h=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

〔題質層次〕：

①先將文字作圖形轉譯（2.10）

② cot 75°求值（1.25）

③由正南方轉譯（2.10）$\angle CAB=90^\circ$後推論（2.30）本題使用畢氏定理。

④選擇投影方法表達$\overline{AC}=h\cot 75^\circ$，$\overline{BC}=h\cot 30^\circ$屬應用（3.20）

⑤本題(丙)（3.20）

⑥(丁)本身層次不高，但受(丙)影響亦爲（3.20）

③ $\cos\angle ACB=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{h\cot 75^\circ}{h\cot 30^\circ}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

3.若 $a>b$ 為二實數，令 $(a, b)\{x\mid x$ 為實數，$a<x<b\}$ 若將不等式 $2\log 2+\log(x^2-5x+3)<2\log(12+5x-x^2)$ 的解集合表為 $(a_1, b_1)\cup(a_2, b_2)$ 其中 $a_1<b_1<a_2<b_2$，則 $(a_1, b_1)=$ (戊)，$(a_2<b_2)=$ (己)。

〔解法步驟〕：

① $2\log^2+\log(x^2-5x+3)$

$<2\log(12+5x-x^2)$

$\Rightarrow \log 4(x^2-5x+3)<\log(12+5x-x^2)^2$

$\Rightarrow 4(x^2-5x+3)<(12+5x-x^2)^2$ ……(i)

且 $x^2-5x+3>0$ ……………………(ii)

$12-5x-x^2>0$ ……………………(iii)

②由(ii)知：$x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $x>\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

③由(iii)知：$\dfrac{5-\sqrt{73}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$

④由(i)得 $x^4-10x^3-3x^2+160x+132>0$

⑤以有理根檢定法尋根

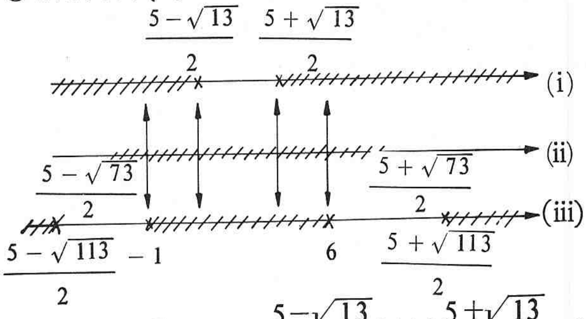
$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -10 & -3 & +140 & +132 & \underline{-1} \\
 & -1 & +11 & -8 & -132 & \\ \hline
1 & -11 & +8 & +132 & \underline{\underline{0}} & \lfloor 6 \\
 & +6 & -30 & -132 & & \\ \hline
1 & -5 & -22 & \underline{\underline{0}} & &
\end{array}$$

故(i)式可改寫爲

$(x+1)(x-6)(x^2-5x-22)>0$

$(x+1)(x-6)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{113}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5+\sqrt{113}}{2}\right)$

⑥聯解(i)(ii)(iii)



故解集合爲 $\left(-1, \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, 6\right)$

〔題質層次〕：

(戊)(己)

①開區間符號定義（第五册）是術語知識（1.11）

②對數規則運算使用及消去對數，立不等式均是方法的知識（1.25）

③眞數大於零，列式解不等式（1.24）

④整理4次式應用有理根，檢驗定理，降次求根（3.20）

⑤三個不等式聯立取交集（1.24）

⑥判讀轉譯用開區間表達（2.10）

⑦(戊)(己)爲（3.20）

4.設A，B為直線$4x+y=5$與雙曲線$xy=1$的兩交點。顯然A，B位於雙曲線的同一分支上。在該分支上求一點C，使雙曲線在C的切線與AB平行，則C的坐標為(庚)，$\triangle ABC$的面積為(辛)。

〔解法步驟〕：	〔題質層次〕：
①設所求切線之方程式為 $4x+y=k$ ②聯立 $\begin{cases}4x+y=k\\xy=1\end{cases}$ $y=k-4x$代入$xy=1$。令判別式為0，，解得$k=4$。進而求得 C之座標為$(\frac{1}{2},2)$ $(-\frac{1}{2},-2)$ ③聯立 $\begin{cases}4x+y=5\\xy=1\end{cases}$ 求得交點： $A(\frac{1}{4},4)$，$B(1,1)$。 ④$\triangle$面積$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 2\\1 & 1\\\frac{1}{4} & 4\\\frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=\frac{3}{8}$ 〔另解〕本題可用導函數求斜率	①假設平行線是規準的知識（1.24） ②求切點要解聯立方程式，是屬轉譯，進而使用$\triangle=0$是理解層次（2.10） ③C點的取決要靠圖形推論判讀（2.30） ④求A，B進而使用三角形面積公式，為方法的知識（1.25） ⑤依從高原則，本題(庚)（2.30） (辛)受(庚)影響，亦定（2.30）

5.(1)連續拋擲銅板4次出現偶數次（包括零次）正面的機率為(壬)。
(2)連續拋擲銅板10次如果已經知道前面4次中出現了偶數次（包括零次）正面，那麼全部10次拋擲中出現6次正面的條件機率為(癸)。

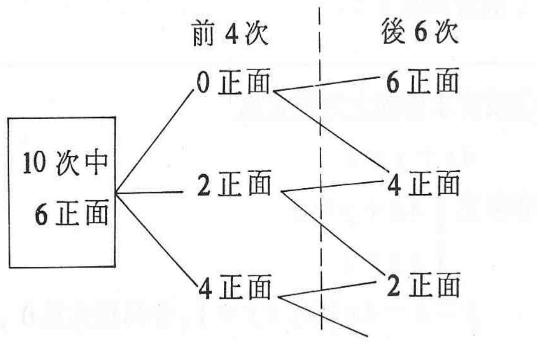
〔解法步驟〕：	〔題質層次〕：
①設A為出現偶數次的事件 $P(A)=\frac{C^4_0+C^4_2+C^4_4}{2^4}=\frac{1}{2}$…………(壬) ②設$B$表10次中前4次偶數事件，$C$表10次中有6次出現偶數的事件。 則$P(B)=\frac{(C^4_0+C^4_2+C^4_4)\cdot 2^6}{2^{10}}=\frac{1}{2}$	①讀題之後有轉譯的能力，才決定古典機率，求$n(S)=2^4$為方法的知識（1.25），但求事件個數時，先要有偶次轉譯（2.10）為C^4_0,C^4_2,C^4_4等符號之能力，再引入互斥事件的了解，並進而推論（2.30）三者相加，其間認知過程包含了互斥範疇的窮盡認定，(壬)為（2.30） ②(癸)的認知過程相當複雜，首先需解釋條件機

$$P(B\cap C)=\frac{C_0^4C_6^6+C_2^4C_4^6+C_4^4C_2^6}{2^{10}}$$

$$=\frac{53}{2^9}$$

率(2.20)

③本題邏輯建構應完成下表：



其中含虛線左、右各關係的分析(4.20)才能選擇判斷、運用知識處理新情境。

④本題 $P(B)=\dfrac{1}{2}$ 可直接引用㈡的答案，但仍需分析虛線左右的關係。

⑤㈡爲(2.30)㈤爲(4.20)

二、設 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，試求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ -a^3 & 1 & -a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ -a & a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}$$ 之值：

〔解法步驟〕：

①$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow a^4=-1$

② $(a^3)(-a^2)(a)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ -a^3 & 1 & -a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ -a & a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

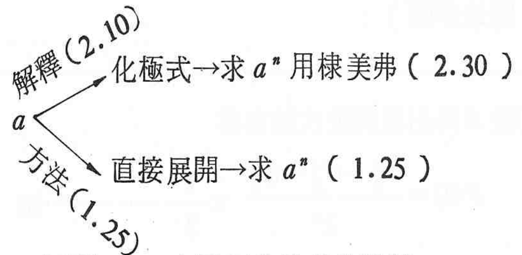
$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2a \\ 0 & 2a^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

〔題質層次〕：

①行列式降階聯想“造零”是對行列式的解釋(2.20)

②至於怎麼“造”及“造成的結果”是方法的知識(1.25)

③ a 的問題：



依命題旨意，應屬極式棣美弗考題。

④本題爲(2.30)

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & 2 & 2a \\ 2a^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8a^4 = 8$$

三、設 L_1 為兩平面 E_1：$2x+y-z=3$ 與 E_2：$2x+2y-z=4$ 的交線，L_2 為兩平面 E_3：$x-2y=-2$ 與 E_4：$x-3y-z=-1$ 的交線。試證明 L_1 與 L_2 相交而且互相垂直。

〔解法步驟〕：	〔題質層次〕：
① L_1 之方向比 $a_1:b_1:c_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $=1:0:2$ L_2 之方向比 $a_2:b_2:c_2=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ $=2:1:-1$ ②$(1,0,2)\cdot(2,1,-1)=0$ $\Rightarrow L_1\perp L_2$ ③解 $\begin{cases} 2x+y-z=3 & \cdots\cdots(1) \\ 2x+2y-z=4 & \cdots\cdots(2) \\ x-2y=-2 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$ (1)−(2) 得 $y=1$ 代入(3) $x=0$ 代入(2) $z=-2$ 即 E_1，E_2，E_3 之交點為 $(0,1,-2)$ ④將此交點代入 E_4 方程式知亦可滿足，即點 $(0,1,-2)$ 在 E_4 上。 $\therefore E_1$，E_2，E_3，E_4 交於同一點。 ⑤即 L_1 及 L_2 之交點為 $(0,1,-2)$	①求 L_1，L_2 的方向比是正確的使用公式，屬解釋（2.20） ②使用內積證明垂直，仍屬正確的使用公式（2.20） ③兩直線交點推論（2.30）成四平面的交點，而解釋（2.20）成任選三平面聯立求交點。 ④點代入第四平面驗證，是辨認訊息合於結果的能力，屬解釋（2.20） ⑤本題為（2.30）

四、設有三數 $\alpha<\beta<\gamma$，且 $\gamma-\beta=\beta-\delta$ 而 ℓ，m，n 為任給的三個實數。

1. 試證存在唯一的一組實數 a，b，c 使得函數
$f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足了
$f(\alpha)=\ell \quad f(\beta)=m \quad f(\gamma)=n$

2. 記 $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx=S$，試用 α，γ 及 $\ell.m.n$ 表示 S 並證明之（S 式中不得含有 a，b，c 或 β）。

〔解法步驟〕：

①$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=\ell$

$f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c=m$

$f(\gamma)=a\gamma^2+b\gamma+c=n$

②就 α,β,γ 及 ℓ,m,n 解 a,b,c。此三元一次聯立方程組有唯一解的條件是：

$$\triangle=\begin{vmatrix}\alpha^2 & \alpha & 1\\ \beta^2 & \beta & 1\\ \gamma^2 & \gamma & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

③實際上

$$\triangle=\begin{vmatrix}\alpha^2 & \alpha & 1\\ \beta^2 & \beta & 1\\ \gamma^2 & \gamma & 1\end{vmatrix}=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

$\because \alpha<\beta<\gamma$,

$\therefore \triangle=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$,

$\therefore a,b,c$ 有唯一解。

④依據 Simpson 的拋物線近似法，求經過三點 $(\alpha,f(\alpha))$，$(\beta,f(\beta))$，$(\gamma,f(\gamma))$ 的曲線，由 α 到 γ 間曲線下 x 軸上的面積的近似值，依據 Simpson 法則

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\frac{\gamma-\alpha}{6}(f(\alpha)+4f(\beta)+f(\gamma))$$

⑤在本題中 $\ell=f(\alpha)$，$\dfrac{m_2 f(\beta)}{n_2 f(\gamma)}$,

$$\therefore \int_\alpha^\gamma f(x)dx=\frac{\gamma-\alpha}{6}(\ell+4m+n)。$$

⑥其證法如下：

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma(ax^2+bx+c)dx$$

$$=\frac{a}{3}(\gamma^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\gamma^2-\alpha^2)+c(\gamma-\alpha)$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}(2a(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+3b(\gamma+\alpha)+6c)$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}\{(a\alpha^2+b\alpha+c)+(a\gamma^2+b\gamma+c)$$

$$+4[a(\frac{\alpha+\gamma}{2})^2+b(\frac{\alpha+\gamma}{2})+c]\}$$

〔題質層次〕：

四-1：

①代入之後需轉譯觀念爲“三個等式”(2.10)

②從“三個等式”需“推論”成三個“聯立方程式”(2.30)

③從“唯一解”有所領悟，選取三元一次聯立解來處理本題的新情境，是屬應用(3.20)

④$\triangle$用“凡得夢行列式”化解是屬正確的使用公式(2.20)

⑤用 $\alpha<\beta<\gamma$ 得 $\triangle\neq 0$ 是關係事實的知識(1.12)

⑥本題爲(3.20)

四-2：

①本題重點在 S 的表示法，有了明確的表法結構模式才能有運算證明的方向。而 S 的表示，需分析

(1) $f(x)$ 圖形爲拋物線

(2) $\int f(x)$ 爲拋物線積分

(3) α，β，γ 的關係爲等距三點

(4) ℓ，m，n 可用 $f(x)$ $f(\beta)$ $f(\gamma)$ 表示，分析之後，建構成一種明確的結構模式——辛浦生法來解決本題，我們判定(5.20)

②證明過程中五個等式(以$\underline{\underline{(1)}}$，$\underline{\underline{(2)}}$，……，$\underline{\underline{(5)}}$)表達：

$\underline{\underline{(1)}}$成型至此，屬正確公式使用，(2.20)

$\underline{\underline{(2)}}$提出 $\dfrac{\gamma-\alpha}{6}$ 已屬推論(2.30)

$\underline{\underline{(3)}}$已達關係的建構(5.20)

$\underline{\underline{(4)}}$爲關係的代換(2.10)

$\underline{\underline{(5)}}$爲符號的代換(2.10)

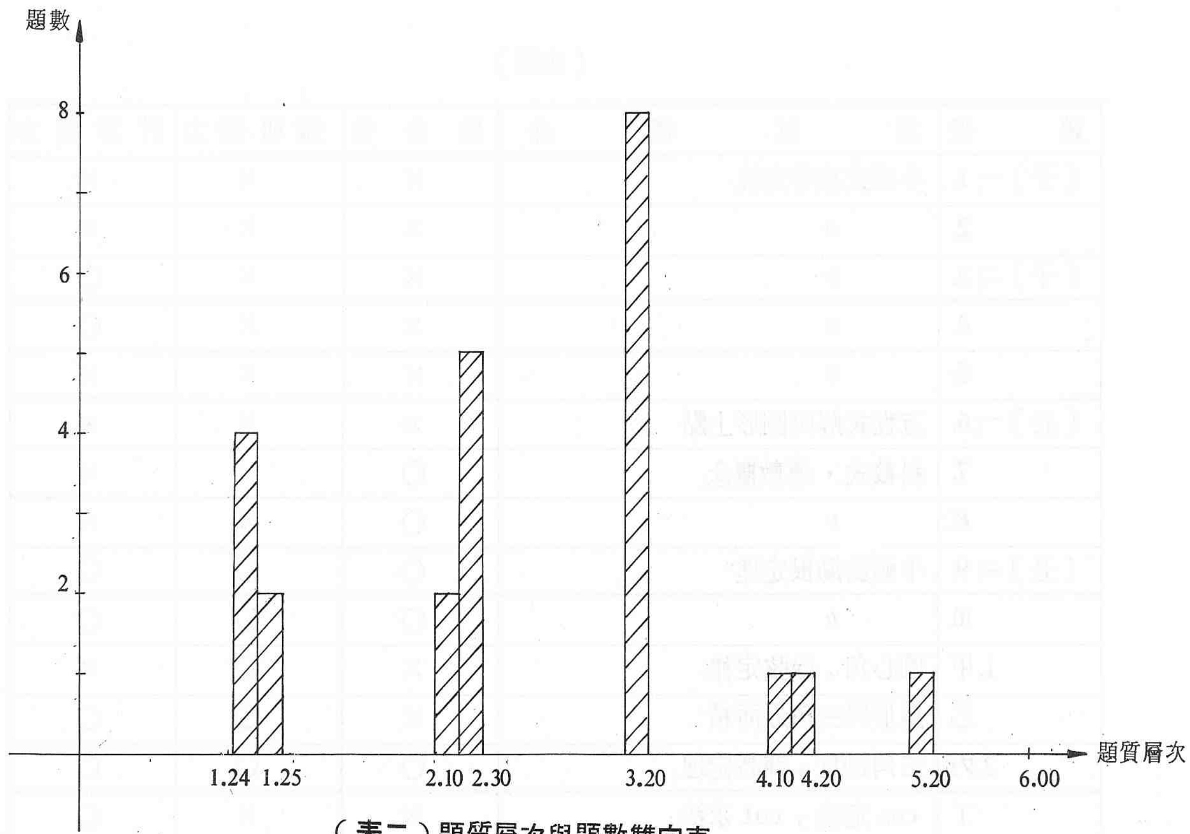
③本題爲(5.20)

$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}\left(f(\alpha)+f(\gamma)+4f(\beta)\right)$$

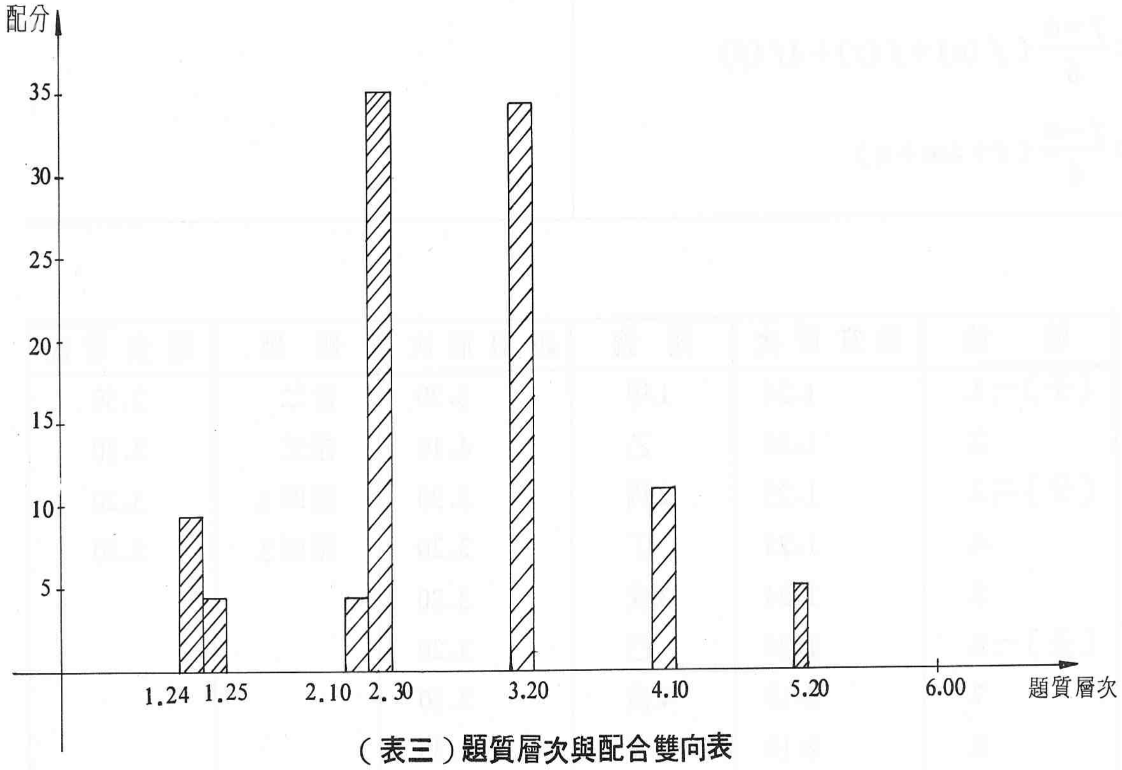
$$=\frac{\gamma-\alpha}{6}\left(\ell+4m+n\right)$$

題　號	題質層次	題　號	題質層次	題　號	題質層次
〔子〕一 1.	1.24	1.甲	3.20	計二	2.30
2.	1.24	乙	4.10	證三	2.30
〔子〕二 3.	1.25	2.丙	3.20	證四 1.	3.20
4.	1.25	丁	3.20	證四 2.	5.20
5.	1.24	3.戊	3.20		
〔丑〕一 6.	1.24	己	3.20		
7.	2.10	4.庚	2.30		
8.	2.10	辛	2.30		
〔丑〕二 9.	3.20	5.壬	2.30		
10.	3.20	癸	4.20		

（表一）題質層次一覽表



（表二）題質層次與題數雙向表



(表三)題質層次與配合雙向表

伍、命題旨意分析一覽表

(表四)

題號	測試概念	整合性	邏輯能力	計算能力
〔子〕一 1.	多項式相等定義	×	×	×
2.	〃	×	×	×
〔子〕二 3.	〃	×	×	○
4.	〃	×	×	○
5.	〃	×	×	×
〔丑〕一 6.	方程式解與圖形上點	×	×	×
7.	斜截式、導數概念	○	×	×
8.	〃	○	×	×
〔丑〕二 9.	牛頓法勘根定理	○	○	○
10.	〃	○	○	○
1.甲	圓心角，餘弦定律	×	○	×
乙	扇形與三角形面積	×	○	○
2.丙	三角測量，商高定理	○	○	○
丁	cos 定義，cot 求法	×	×	○

3.戊	對數定義，對數運算公式，條件不等式解法	○	○	○
己	有理根檢驗，交集聯集概念	○	○	○
4.庚	直線、雙曲線、切點、一元二次判別式	○	○	○
辛	直線、雙曲線、交點、三點求△面積	○	○	○
5.壬	古典機率，組合	×	○	○
癸	條件機率	×	○	○
計二	行列式，棣美弗定理	○	×	○
計三	空間平面與直線	×	○	○
證四 1.	三元一次方程組解的性質	×	○	○
證四 2.	Simpson 法定積分	○	○	○
比　值	$\dfrac{\text{有此性質之題數}}{\text{總題數}}$	$\dfrac{11}{24}=46\%$	$\dfrac{14}{24}=58\%$	$\dfrac{17}{24}=71\%$

註：○表有，×表無。

陸、命題技巧評議

七十六學年度大學暨獨立學院聯招入學考試除了爲各大學院校甄選優秀學生外，尚肩負一項使命——爲三年高中新教材的實施結果，第一次作有實質數據的大規模評鑑。針對今年聯招此一任務，我們願對這次的數學科（自然組）考題的部份題目提出一些看法以就教於有識。

(A)逐題評議

〔子〕 這個試題的實質概念是多項式的展開以及全等定義，其認知層次不高，也無須什麼邏輯建構能力。其中 3 ，4 兩小題的運算技術也僅是稍高於基本規則的技術準則，所以就題言題，這是一道較易得分的題目，而置放最前頭，多少有穩定考生情緒的作用，非常合乎測驗的命題原理，因此本題最大用意當不在測驗考生的數學能力。

〔丑〕 儘管在舊教材實施時，爲了解題快速，大多教師都教授了導數的方法及其部份的應用，而整體導數概念的介紹在高中課程中尚屬首次。本題的實質概念是要驗出考生對導數與斜率關係的了解程度以及牛頓法的正確應用。就單元中的結構來看，它的認知層級也不高，但這個單元本身所需的先前概念却相當龐大，所以在教材結構的位階上應當給以相當的結構加權。本題與〔子〕題相較，需要更高的邏輯能力，而不需相當的運算能力。以扣緊數學目標的觀點來看，本題的難易程度是一個值得喝彩的選擇，假設這個題目的難度提高，勢必導引各校的教學進入艱深化的不正常導向，良非當初制定新教材本意。

第二部分

一、填充題

1. 實質概念都是相當下位層級的基本三角概念，如扇形面積的求法，三角形面積的求法，餘弦定理或半角函數的直接應用。但要解出本題却需要相當高的邏輯建構及各項資料的整合能力。假設考生在解決斜線面積的問題時選擇不當的組合方式，計算時必定增加很大的麻煩。時間耗費的結果，也會影響往後題目的思考。這種測驗正確選擇方法的試題較能有效測出考生的數學能力。

2. 三角測量問題，由題目的本文敍述，應能直接轉譯爲圖形。題中諸元間的關係，由圖中尋找線索亦非難事。邏輯能力需求不高，但計算却極爲繁複。$\overline{AB}$ 長度值 $\dfrac{30}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}$，沒有證據說它沒經選擇設計。但可以推測的是完全答對這題的人數一定不多。在命題時是否測過一個一般考生要正確地算出這題答案須要多少時間（這種測定的情境最好能與聯招考試相同）。我們無意强調邏輯能力而排斥運算，但過於繁雜的計算可能使一個原本不錯的試題由於通過率的偏低反而失去了鑑別的意義。

3. 本題與上題相類，重點仍是放在完全計算能力的考核上。認知層次則偏低，需要的整合能力不甚高。處理各步驟的解答也都定位在對規則的熟悉與否，題首的區間及題末的數值順序規定是希望將來作答時能呈現唯一性。條件不等式的處理高達4次，不易計算。當然如果考生在題中發現可以引進 $y=x^2-5x$，則對本題的解決有很大的幫助。但在應考時是否多數的人在那麼緊張的情緒之下都能想出這條線索是個問題。命題時應當要考慮學生在應考時的情緒以及所能運用的時間，更重要的還是題目本身的甄別能力。

   此外我們衷心希望聯招委員會能於每次考試後儘早公佈每一題的通過率，鑑別率等資料，俾使有心研究人士對他們的研究能有正確效標。進而依據以修正研究方法，獲致更精確的結果。

4. 題旨是在測圖形交點的幾何意義轉化於方程式的聯立的轉譯能力。在新教材中關於座標軸的旋轉全部刪除，但都出現了 $xy=1$ 的方程式容易引發爭議。假設考生僅有標準位置的圖形觀念，而完全不知道 $xy=1$ 的圖位置及方向，那麼顯然 A，B 在同一分支上便不那麼“顯然”了。本題無疑在整合力，邏輯與運算能力皆能兼顧。唯 $xy=1$ 的出現令我們擔心是否會影響到爾後的正常教學。

5. 一個頗有水準的試題，測出什麼是互斥及每一個互斥事件範疇，以及相當高明的分支化分析能力。相信這是一題鑑別度高的試題。尤其是題中“包含零次”的明示更能避免考生誤蹈陷阱而徒致爭議。

二、計算及邏輯均非上層，難度不高，認知亦僅及理解，只要對行列式運算技法稍能熟稔，解出本題當不成問題。題中

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ 要應用到 a 的4次或8次方。命題旨意當是在測對棣美弗定理的了解及應用。果然，則相使用 $a=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ 甚至於 a 爲單位圓上由（1，0）開始的5等分點來作測驗，當更能測出效果。本題的 a 值即使不依棣美弗仍可輕易獲致解答，是不是與命題旨意相違？一個配分爲十分的計算題，是否應該在適當的地方測驗一下考生的方法選擇能力？

三、空間向量概念的問題，不需很高的邏輯與運算能力，但對各步驟間的整合却能分出高下。對空間平面與直線關係的觀念能充分掌握、理解才能沒困難地解出本題，是

個相當成功的試題。

四、1. 測驗三元一次聯立方程組解的性質的應用。需要邏輯能力。

2. 經過討論後的猜測，本題的題旨是在測出考生是否能列出Simpson 的面積近似值求法，進而加以證明。果真如此，則本題無論從各方面來看都是一道相當高水準的試題。命題技術有水準，且解出答案更需水準。在認知層面上，本題被我們判列為綜合。想從題中所給的各項參數中能理出本題與Simpson的關係便需非常的分析力。要把一些表面上看來比重相同的資料重組，並與自己過去的所學作比較，才能先應用Simpson法列出本題欲證的結果。

至於證明部份由已知條件到結果的證出，若未能記住某些關鍵變化，想要在短時間內想出證法不太容易，換句話說，本題多少也要測測學生對於課本中某些重要定理是否熟讀，一個不懂得 Simpson法的考生要想得到本題的分數實在不太可能。

命題的瑕疵是第一小題中試證明：「存在唯一」……這點似乎可以改成「有唯一」，是不是較不易誤導考生往存在及唯一分開證明的岐路？而能直接想到以三元一次聯立組解的性質應用來解題。

另外題中條件應就每小題的需要而分列，質言之，四的題目如果改為：

1.沒有三實數α，β，γ而ℓ，m，n為任給的三個實數，試證，……。

2.承上題，若$\gamma-\beta=\beta-\alpha$，記$S=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$，試用$\alpha$，$\gamma$，……表示$S$並證明之。

是否更能提供學生將題中條件集中思考該題的思路？

(B)綜合評議

整體而言，我們發現這是一份題質層次難度正常，測試概念整合性及邏輯能力皆不高的考題，這可從（表三）題質層次略呈常態偏左（偏易）分佈，及（表四）整合性46%，邏輯能力58%看出。但是，測試完整計算能力的考題則高達71%，可能就是這一因素使得今年自然組數學的高標準只有45分，低標準只有32分，兩者皆低，差距也不大，鑑別力大為降低。試想炎炎夏暑，考生揮汗如雨，考一份超過一半以上題目要測試繁煩計算的考題，誠屬苦事。有詩為證：

低桿吃不消
高手出預料
解題大老爺
消暑樂陶陶

根據（表三）（表四），我們有如下的發現：

1.題質層次看來是常態，但聯招試題是總結性的鑑定測驗，是否常態最佳或需視錄取率調整，尚值探討。

2.高中生應具備整合能力，聯考題應加重整合性考題。通常，題數量多整合性會少，題數量少整合性才能提高。

3.從（表四）可看出命題對邏輯能力是重視的，這種能力的培養，應是數學教育的重點。

4.從（表四）的關係中，我們歸納出：

(1)有“高度”整合性者⇒有邏輯建構（但計算第二題是個例外，因a的次方選擇，怎麼做都可以，甚至連摸索的時間都不會浪費，因a值的“設計太好”而導致無邏輯建構問題）。

(2)有邏輯建構者，未必有整合性。如填充第5題。

(3)同範疇內小整合，未必有邏輯建構。如選擇7，8題。

5.（表四）中計算能力的試題高達 71％ ，可見相當重視。但數據應精心設計，量數應控制，俾便又能測試完整計算能力，考生又不致望“數海”而興嘆！

6.（表二）及（表三）高度重疊，似可從題質層次及概念含量，加强配分的調整。以便拉開高低標準的差距。

柒、結 語

由於升學主義的影響，聯考領導教學已是不諍的事實，如何爲聯考試題——特別是爲國掄才的大學聯考試題建立一套評估制度，以導正學校的教學，實爲刻不容緩的問題。高中教師人微言輕，我們希望透過具體事實來表達意見，這也是我們嘗試以客觀的方式來分析聯考試題的原因。我們也希望持續經年後，能夠建立可用的數學難易度評量表尺，更希望有常設的研究機構，能夠負責、推廣此一工作。

由於首次嘗試，再加上時間所限，在分析架構以及評量標準方面，可能有待改進之處甚多。至少命題旨意的評量項目，應可進一步細化並予量化。如實質概念可考慮依上位概念、下位概念之不同結構層次而給予加權；概念整合也可再分爲同範疇概念小整合（如本次聯考選擇 7 ，8 兩題）與異範疇概念大整合（如選擇第 9 題）；計算能力或可再區分爲完整過程的計算能力（如以牛頓法求根的近似值）與局部過程的計算能力（如二元一次方程式求解）；分析建構能力則可依邏輯分析、推衍的層次設法區分並量化。我們認爲如將命題旨意諸評量項目的量化權數，加總到題質層次，相信更能顯示各題難易的差距。

最能反映題目難易的題質分析，雖然國外的研究已確證六層次有階層上的差異，但是否爲等距？而如不是等距，各層次又該是相差如何？ 這是要標定試題難易度最需努力的方向。我們希望有更高明的人，在此方面給我們提供建議。

這一篇分析，我們目的是爲聯考試題分析系統化作拋磚引玉工作，懇盼讀者不吝指正。

註一：參見 教育部國民教育司主編：「學習成就評量手册，國中數學㈠」 台北：國立台灣師範大學科學教育中心，民國 64 年 4 月。 另 Bloom 氏的認知六層次分類規則，詳細可參考 黃光雄等譯：「認知領域目標分類」 高雄：復文書局，民國 72 年 6 月。

註二：本篇分析架構與評量標準，主要由洪文瓊、呂素齡兩位幫忙提供，另有吳英長、陳嘉慶、張世敏等位老師參與討論，敬此一併致謝。

本文作者：楊大衛，清華大學數學系畢業；李瑞，師大數學系畢業；林威廉，交大應數學學系畢業，現均為高中數學教師。