# 費馬大定理綜述

楊重駿　馬立志

要知道費馬大定理，首先得從勾股定理說起。

早在公元前1120年，我國古代數學家商高就得到“勾三股四弦五”的結果。我國古算書≪周髀算經≫一開頭便提到了“勾廣三，股修四，經隅五”。趙爽在該書的注釋中還說：“禹治洪水，決流江河，望山川之形，定高下之勢，除滔天之實，釋昏墊（百姓）之厄，使東注之海而無浸逆（溺），乃勾股之所由生也”。這本書後半部分講解≪蓋天≫說中，可以看到“勾股定理”的一般形成：

$$勾^2 + 股^2 = 弦^2$$

我國古代數學家依據出入相補原理，證明了這個定理。證明的大意是這樣的：如圖1，

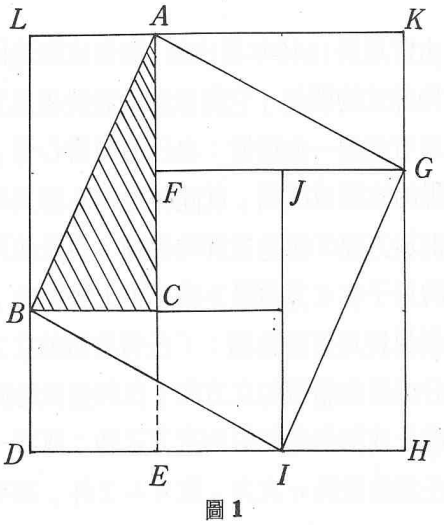


圖1

有直角三角形$ABC$，$BCDE$所成正方形面積是勾方，$EFGH$所成正方形面積是股方，把兩者面積二和$DBCFGH$的$\triangle BDI$移到$\triangle ABC$，$\triangle GHI$移到$\triangle AFG$，就得到$ABIG$的面積=弦方，由此得到勾股定理。

勾股定理當今被廣泛地應用着，不僅初等數學，就是高等數學中的一些計算題和推論證一些定理時，也經常要用到。

公元前六世紀，卽商高得到“勾股定理”約五百年之後，古希臘的數學家畢達哥拉斯（Pythagorean）也證明了這個定理，傳說當時還殺了一百頭牛表示慶賀。從此，外國都把這個定理叫做畢達哥拉斯定理。由於畢達哥拉斯獲得這個定理比商高要晚，因此這個定理在我國稱之爲商高定理，或勾股定理。現在我們把它敍述如下：

勾股定理：若$x$和$y$爲一直角三角形的兩直角邊，$z$爲其斜邊，則

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

我們稱三條邊均爲整數的直角三角形爲畢達哥拉斯三角形（嚴格的說，這些邊並不是整數，而是用整數來表示其長度的某些線段）。找出所有的畢達哥拉斯三角形的問題就等同於求出方程(1)的所有整數解。關於這個問題，數學家們已經得到了下面的結果：

$x^2+y^2=z^2$的所有解$x=a$，$y=b$，$z=c$（其中$a$，$b$，$c$全爲正數且無大於1的公因子，$a$爲偶數）均可寫爲

$$a=2mn$$
$$b=m^2-n^2$$
$$c=m^2+n^2$$

其中$m$和$n$是互質的整數且不同爲奇數，$m>n$。

從上面的結果，我們不難看出，畢達哥拉斯三角形問題事實上已被徹底解決。因爲方程(1)的任一組解$x=a$，$y=b$，$z=c$，我們總可以按下面的方法，化爲滿足上面結果中的條件的解：設$d$是$a$、$b$、$c$的最大公因子，且記$a_1=\frac{a}{d}$，$b_1=\frac{b}{d}$，$c_1=\frac{c}{d}$顯然$a_1$，$b_1$，$c_1$的最大公因子爲1，且$a_1^2+b_1^2=c_1^2$。另一方面，我們再來說明$a_1$，$b_1$不可能同是奇數。爲了下面說明方便我們先引入如下定義：當且唯當$m|(a-b)$時，我們稱$a$與$b$對模$m$同餘，用記號可寫爲$a\equiv b(mod\,m)$（這裡"$m|(a-b)$"，即$(a-b)$能被$m$整除，並且我們總設$m>0$）。於是若$a_1$，$b_1$同是奇數，則由簡單的演算可以知道$a_1^2\equiv 1(mod\,4)$，$b_1^2\equiv 1(mod\,4)$，因而$c_1^2=a_1^2+b_1^2\equiv 2(mod\,4)$。注意到任一整數$x$，它只可能$x^2\equiv 0(mod\,4)$或$x^2\equiv 1(mod\,4)$，所以$c_1^2\equiv 2(mod\,4)$是不可能的，即$a_1$，$b_1$兩數中必有一個是偶數，不妨設$a_1$是偶數，於是存在$m$，$n$使$a_1=2mn$，$b_1=m^2-n^2$，$c_1=m^2+n^2$，亦即：

$$a=2mnd,\quad b=(m^2-n^2)d$$
$$c=(m^2+n^2)d \qquad (2)$$

這事實上給出了畢達哥拉斯三角形問題的解的一般形式。

從十七世紀開始，人們又開始尋找方程

$$x^3+y^3=z^3 \qquad (3)$$

和

$$x^4+y^4=z^4 \qquad (4)$$

的整數解，但是作了許多嘗試都未能成功，因爲(3)、(4)根本就無解（只有一個例外，即變數$x$、$y$、$z$之一取零時，會有理數解，我們把這樣的解稱爲平凡解，並以爲這種解不值得我們多費筆墨，我們下面所說的"解"均是指"非平凡解"）。

當時，法國數學家費馬（Fermat）在巴黎買了一本刁番都（Diophantus）所著《算術學》，他讀這本書時，在書上空白處寫了一段話：

「$x^2+y^2=z^2$有無窮多組整數解，而形如

$$x^n+y^n=z^n \qquad (5)$$

的方程，當$n$大於2時，永遠沒有整數解。」

後人稱費馬的這個結論爲"費馬大定理"。

費馬（1601～1665）出生於法國圖盧茲（Toulouse）附近的一個皮革商人家庭，他學習法律並擔任過律師，業餘研究數學，他的成果均發表在書信中，沒有公開出版書，他受刁番都的著作的影響，研究數論，對近代數論作出了傑出的貢獻，比如數論中著名的"費馬定理"：

"若$p$爲質數，$a$，$p$互質，則

$$a^{p-1}\equiv 1(mod\,P)" \qquad (6)$$

便是由費馬於1640年提出的，這個定理是研究二次同餘式的關鍵，它對數論的發展極爲重要。費馬有這樣一個習慣：自己的讀書心得，以及發現的定理或證明，就隨便地寫在書頁的邊上。關於方程(5)無整數解的結論，也是他死後，他的兒子在《算術學》這本書上發現的，而且還發現費馬這樣寫道：「任何整數的立方，不能分成兩個整數的立方和；任何整數的四次方不能分成兩個整數的四次方之和；或者一般地，任意整數的$n$次方，除$n=2$外，都不能

分成兩個整數的 $n$ 次方之和，我想出了一個絕妙的證明方法，但是，這頁邊太窄，不容我將證明寫出來。」由這段話可見，費馬對於方程(3)、(4)、(5)無整數解，得到了數學證明，遺憾的是他沒有把證明寫出來便去世了。

三百多年來，世界各國許多優秀的數學家都想嘗試重新給出它的證明，但出人意料的是時至今日也沒有成功。“費馬大定理”成了數學史上一個著名的難題。

費馬本人證明了當 $n=3$ 時定理爲眞，十八世紀早期，德國偉大的數學、物理學家高斯（Gauss）證明了 $n=4$ 時定理成立，十九世紀德國另一位著名的數學家狄里克萊（Dirichlet）證明了 $x^5+y^5=z^5$ 無整數解。後來又有人證明了對於 $n\leq 150,000$，該定理的正確性。值得注意的是最後一個結果的證明是由計算機完成的。

下面我們將要看到，儘管費馬大定理當 $n$ 爲 2 時能夠用簡單的方法給出其所有的解，但是隨着 $n$ 增加，證明的難度也逐步增大，最典型的例子莫過於增明 $n=3$ 時的情形，這也許從一個方面告訴我們費馬大定理之所以成爲數學史上的一大難題。

我們現在就來看看當 $n=3$ 時的證明，亦卽證明

$$x^3+y^3+z^3=0 \tag{A}$$

無適合 $xyz\neq 0$ 的解。

首先不妨假設 $x$，$y$，$z$ 的最大公因子爲 1，$x$、$y$ 是奇數，$z$ 是偶數，並且取 $z$ 還使得 $|z|$ 是這樣的解 $x$，$y$，$z$ 中的最小的。卽任何 $x_1$，$y_1$，$z_1$ 適合(A)，$x_1$，$y_1$，$z_1$ 互質，$x_1$，$y_1$ 是奇數，$z_1$ 是偶數，必有 $|z_1|\geq|z|$。

我們的證明思路是要從 $x$、$y$、$z$ 出發，構造出一組解 $m$、$n$、$\ell$。

$$m^3+n^3+\ell^3=0 \tag{B}$$

其中 $m$，$n$，$\ell$ 互質，$m$，$n$ 是奇數，$\ell$ 是偶數，但 $|z|>|\ell|$，從而與 $|z|$ 取法矛盾。

由於 $x$、$y$ 是奇數，所以存在 $a$、$b$ 使

$$\begin{aligned} x+y&=2a\\ x-y&=2b \end{aligned} \tag{C}$$

這裡 $a$，$b$ 互質，但 $ab\neq 0$。這是由於任何 $d|a$，$d|b$ 由(C) $x=a+b$，$y=a-b$ 知 $d|x$，$d|y$，但 $x$、$y$ 互質，所以 $d=1$。另外若 $ab=0$，不妨 $a=0$，知 $x+y=0$，$x=-y$，$x^3+y^3=0$，$z^3=0$，$z=0$，這與 $xyz\neq 0$ 矛盾。因此

$$\begin{aligned} -z^3=x^3+y^3&=(a+b)^3+(a-b)^3\\ &=2a(a^2+3b^2) \end{aligned} \tag{D}$$

由於 $a$、$b$ 不可能同爲偶數，因而 $a^2+3b^2$ 是奇數，又由於 $2|z$，所以 $8|2a$，$4|a$，因而 $b$ 必是奇數，又任何質數 $p$，若 $p|2a$，$p|a^2+3b^2$，則我們說必 $p=1$ 或 $p=3$，這是因爲首先 $p\neq 2$。若 $p=2$ 由於 $a$ 是偶數，知 $2|3b^2$，推出 $2|b$，矛盾。另外若 $p\geq 3$。由於 $(p,2)=1$，從而 $p|a$，所以有 $p|3b^2$，分兩種情形

(a) $p|3$

(b) $p|b^2$

情形(b)不能成立，因爲 $p|b$，由 $p|a$ 矛盾。由此可知必

$$(2a,a^2+3b^2)=1 \text{ 或 } 3 \tag{E}$$

第一種情形：$(2a,a^2+3b^2)=1$ 由(D)式知存在 $r$，$s$ 使

$$\begin{aligned} 2a&=r^3\\ a^2+3b^2&=s^3 \end{aligned} \tag{F}$$

其中 $s$ 是奇數，從上式，根據歐拉（Euler）的一個結果，我們知道存在整數 $u$、$v$，使

$$s=u^2+3v^2 \tag{G}$$

其中

$$\begin{aligned} a&=u(u^2-9v^2)\\ b&=3v(u^2-v^2) \end{aligned} \tag{H}$$

由於 $b$ 是奇數，所以 $v$ 也是奇數，並且 $u \neq 0$，$u$ 是偶數，$3 \nmid u$（$3 \mid u \Rightarrow 3 \mid a$，$3 \mid b \Rightarrow 3 \mid (a, b) = 1$ 矛盾）及 $u$，$v$ 互質。進一步，

$$r^3 = 2a = 2u(u - 3v)(u + 3v) \quad \text{(I)}$$

注意到 $2u$，$u - 3v$，$u + 3v$ 必兩兩互質。又對任何質數 $p$，$p \mid u - 3v$，$p \mid u + 3v \Rightarrow p \mid 2u$，$p \mid 6v$。當 $p = 2$ 由 $2 \mid u - 3v \Rightarrow 2 \mid v$ 矛盾；當 $p = 3 \Rightarrow p = 3 \mid u$ 矛盾；當 $p > 3$，由 $p \mid 2u$，$p \mid 6v \Rightarrow p \mid u, p \mid v \Rightarrow p \mid (u, v) = 1$ 也是矛盾，因此我們總可以寫

$$\left.\begin{aligned} 2u &= -\ell^3 \\ u - 3v &= m^3 \\ u + 3v &= n^3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(J)}$$

顯然 $m$，$n$ 奇數，$\ell$ 偶數，且 $\ell$、$m$、$n$ 兩兩互質及

$$m^3 + n^3 + \ell^3 = 0 \quad \text{(K)}$$

但另一方面注意到 $b \neq 0$，$3 \nmid u$，因而

$$\begin{aligned} |z^3| &= |2a(a^2 + 3b^2)| \\ &= |\ell^3(u^2 - 9v^2)(a^2 + 3b^2)| \\ &\geqslant 3|v^3| > |\ell^3| \end{aligned}$$

這是不可能的。

第二種情形：$(2a, a^2 + 3b^2) = 3$

設 $a = 3c$，則由於 $4 \mid a$，因而 $4 \mid c$，$3 \nmid b$（$3 \mid b$，與 $3 \mid a \Rightarrow 3 \mid (a, b) = 1$ 矛盾）從而

$$\begin{aligned} -z^3 &= 6c(9c^2 + 3b^2) \\ &= 18c(3c^2 + b^2) \end{aligned}$$

不難看出 $(18c, 3c^2 + b^2) = 1$，且 $3c^2 + b^2$ 是奇數，$3 \nmid 3c^2 + b^2$。因此

$$\left.\begin{aligned} 18c &= r^3 \\ 3c^2 + b^2 &= s^3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(L)}$$

其中 $s$ 是奇數，因情形 1 的結論，有 $s = u^2 + 3v^2$

$$\left.\begin{aligned} b &= u(u^2 - 9v^2) \\ c &= 3u(u^2 - v^2) \end{aligned}\right\} \quad \text{(M)}$$

因此 $u$ 是奇數，$v$ 是偶數，$v \neq 0$，$(u, v) = 1$。同樣簡單的討論知 $2v$，$u + v$，$u - v$ 兩兩互質，因而由

$$\left(\frac{r}{3}\right)^3 = 2v(u + v)(u - v) \quad \text{(N)}$$

有

$$\left.\begin{aligned} 2v &= -\ell^3 \\ u + v &= m^3 \\ u - v &= -n^3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(O)}$$

所以

$$m^3 + n^3 + \ell^3 = 0$$

這兒 $mn\ell \neq 0$，最後

$$\begin{aligned} |z|^3 &= 18|c|(3c^2 + b^2) \\ &= 54|v(u^2 - v^2)|(3c^2 + b^2) \\ &= 27|\ell|^3|u^2 - v^2|(3c^2 + b^2) \\ &\geqslant 27|\ell|^3 > |\ell|^3 \end{aligned}$$

即 $|z| > |\ell|$ 這與 $|z|$ 的取法矛盾。

這樣我們就證明了當 $n = 3$ 時費馬大定理成立。

從上面的證明中我們不難看出，要證明對一般的 $n$ 費馬大定理也成立，確非易事。

1908 年，德國人渥夫卡爾（Wolfkehl）提供一筆在當時看來爲數不小的獎金，懸賞十萬馬克，徵求“費馬大定理”的解答。之後，每年都收到大量不正確的解答，有時也收到一些著名數學家的錯誤證明的稿件。法國科學院也發表聲明，對於證出這個難題的人要授予一筆可觀的獎金，結果依然是大失所望。另外，有趣的是德國人的獎金只給予證明定理爲眞的人，而對那些找到了某個 $n > 2$ 以及 $x$，$y$，$z$ 使 $x^n + y^n = z^n$ 的人是不予獎賞的。

近幾年來，“費馬大定理”的解決似乎出現了新的希望，1983 年，美國普林斯頓（Pri-

nceton）大學的格特福爾汀（Gerd Faltings）教授證明了數論上一個著名的猜想——莫德爾猜想（Mordell）。他同時還證明了對每一 $n \geqslant 3$，若費馬方程

$$x^n + y^n = z^n$$

存在解（$x$，$y$，$z$），則這樣的解的個數一定是至多有窮多個，這個結果使得費馬大定理的最後解決大大前進了一步。

另外德國薩爾蘭斯（Saarlands）大學的福雷（Frey）教授在研究橢圓曲線時發現（所謂橢圓曲線，簡言之是由下列方程所表示的一類曲線：$y^3 = x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$，其中 $c_0$，$c_1$，$c_2$ 是常數），費馬大定理與一個關於橢圓曲線的猜想是等價的，也就是說如果這個猜想被證明是對的，則“費馬大定理”必也是對的，反過來也可由“費馬大定理”爲眞推出這個猜想成立。

福雷教授的這一發現引起了人們極大的興趣，因爲對橢圓曲線的研究，至今已有許多傑出的工作，這使得數學家們有可能利用這些已知的結果，從另一個角度，最後解決“費馬大定理”。

爲了繼續介紹福雷教授的研究工作，我們有必要對橢圓曲線有個初步的了解。

由於一般的三次方程：

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (7)$$

可通過變換 $y = x + \dfrac{b}{3a}$ 化爲

$$y^3 + 3py + q = 0 \qquad (8)$$

其中

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

於是數學家們便只考慮一類特殊的橢圓曲線：

$$y^2 = x^3 + Ax + B \qquad (9)$$

其中 $A$、$B$ 有理數，判別式 $\Delta = 4A^3 + 27B^2$ 不等於零，他們的着眼點方程(9)的有理解（$x$，$y$）的可能情形（所謂（$x$，$y$）是有理解，即 $x$、$y$ 均是有理數）。

首先，數學家們在方程(9)的全體解所成的集合裡，定義了一個加法，使得任意兩個(9)的解 $P = (x_1, y_1)$，$Q = (x_2, y_2)$ 可以通過這個加法，得到另一個解 $R = (x_3, y_3)$，即 $P + Q = R$。他們的方法是這樣的，如圖 2 所示。通過 $P$、$Q$ 兩點可畫一條（唯一的）直線 $L$（當 $P = Q$，$L$ 定義爲經過點 $P$ 的曲線(9)的

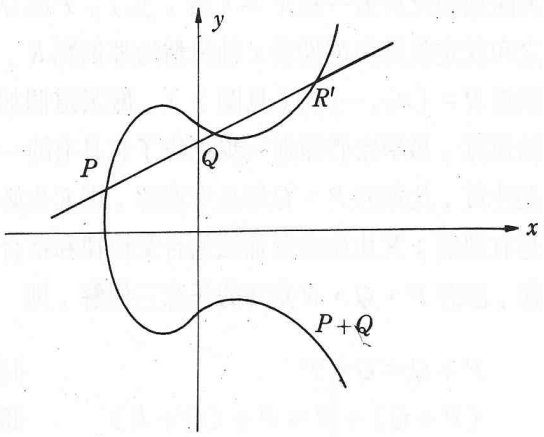


圖 2

切線）。如果 $L$ 垂直於 $x$ 軸，則就定義：

$$P + Q = \infty$$

如果 $L$ 不垂直於 $x$ 軸，則不難推出，$L$ 的方程是：

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \qquad (10)$$

（當 $P = Q$ 即 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$）由於曲線(9)在 $P$ 點的斜率是

$$y'|_p = \left.\frac{3x^2 + A}{2y}\right|_p = \frac{3x_1^2 + A}{2(x_1^3 + Ax_1 + B)}$$

所以切線方程爲

$$y=\frac{3x_1^2+A}{2(x_1^3+Ax_1+B)}(x-x_1)+y_1 \quad (11)$$

注意到$L$不垂直於$x$軸，因而(10)中$x_2\neq x_1$，(11)中$x_1^3+Ax_1+B\neq 0$，從而(10)、(11)都有明確的定義。因此直線$L$與橢圓曲線(9)的交點是下述方程組的解：

$$\begin{cases} y^2=x^3+Ax+B \\ y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1+y_1 \end{cases} \quad (12)$$

亦即

$$x^3+Ax+B=(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1)^2 \quad (13)$$

這是一個三次方程，由此我們知道直線$L$必等於曲線(9)交於另一點$R'=(x_3,y_3)$，$P$與$Q$之和就定義爲與$R'$關於$x$軸對稱的那個點$R$，顯然$R=(x_3,-y_3)$（見圖2）。關於這個加法運算，數學家們還進一步指出了它具有的一些性質，比如若$P$、$Q$均是有理解，則$R$也必是有理解；又比如這個加法適合交換律和結合律，即若$P$、$Q$、$R$是(9)的任意三個解，則

$$P+Q=Q+P \quad (14)$$

$$(P+Q)+R=P+(Q+R) \quad (15)$$

另外，對每一個(9)的解$P=(x_1,y_1)$，他們還定義了一個它的逆元素$-P=(x_1,-y_1)$不難看出

$$P+\infty=P \quad (16)$$

（因爲$P+(-P)=(x_1,y_1)+(x_1,-y_1)=\infty$）

於是(9)的所有的解（加上$\infty$）就構成了一個阿貝爾群，並且由(9)的有理解的運算的封閉性，我們還知道(9)的全部有理解（加上$\infty$）組成一個子群。

下面是兩個例子。

**例1**：$y^2=x^3+17$

$P=(-1,4)$，$Q=(4,-9)$

$$2P=(\frac{137}{64},-\frac{2651}{512})$$

$$P+Q=(\frac{94}{25},\frac{1047}{125})$$

**例2**：$y^2=x^3-372x+2761$

$P=(2,45)$　$2P=(12,-5)$

$3P=(11,0)$　$4P=(12,5)$

$5P=(2,-45)$　$6P=\infty$

前面我們已經說了數學家的着眼點在於(9)的有理解。數學家莫德爾（Mordell）曾經證明了下面的定理：

存在方程(9)的有限個有理解$P_1$，$P_2$，……，$P_r$，使得每一個(9)的有理解$P$，均可表成如下形式

$$P=n_1P_1+n_2P_2+\cdots\cdots+n_rP_r \quad (17)$$

其中$n_1$，$n_2$，……，$n_r$是整數。

換言之，(9)的有理解所成子群是有限元生成的。

另外，對於(9)的每一解$P$，數學家們還研究了$2P$，$3P$，…… 這樣一串無窮序列的情形，有趣的是在有些情況裏，比如例1中，對每一$n$（$n=1,2,\cdots\cdots$），$nP=\infty$，而在另外一些情況中，比如例2裡，$6P=\infty$。於是他們稱後者是有窮級的。即若存在某個$n$使$nP=\infty$則稱$P$是有窮級的，並且將使得$nP=\infty$的最小的$n$，稱爲$P$的級，比如例2中$P$的級爲6。

有了級的概念之後，數學家魯茲和納杰爾（Lutz-Nagell）又證明了下面這個定理，他們的結果能使我們事實上找出(9)的所有有窮級的理解，他們的定理是這樣的：

設方程(9)中$A$、$B$均是整數，又$P=(x,y)$是(9)的一個有窮級的有理解，則必$x$與$y$是整數，並且或者

① $y=0$，$2P=\infty$　或者

② $y^2$整除$\Delta=4A^3+27B^2$

根據這個定理，在例1中，由於$2P$的座

標不是整數，因而 $2P$，從而 $P$ 不是有窮級的；在例 2 中 $3P=(11,0)$，而縱座標 $y=0$，因而 $2(3P)=\infty$ 又 $\Delta=-3^6\cdot5^3$，對 $P=(2,45)$ 來講 $y^2=3^4\cdot5^2$ 能整除 $\Delta$。

一個更深刻而又漂亮的結果是由馬傑爾教授提出來的，他證明了：

方程(9)最多只有15個有窮級的有理解，並且若它有一個 $n$ 級的有理解，則 $2\leqslant n\leqslant 10$ 或 $n=12$。

進一步，馬傑爾教授還指出對每個 $n\leqslant 10$ 或 $n=12$，我們可以找到(9)的一個有理解，其級爲 $n$。因此，不難看出，這個結果給出了橢圓曲線的有窮級的有理解的一個徹底刻劃！

另外，我們指出，爲了證明費馬大定理，實際上只需證明不定方程

$$x^4+y^4=z^4$$

和不定方程

$$x^p+y^p=z^p,\ p\text{是奇質數} \tag{18}$$

均無 $xyz\neq 0$ 的整數解。

這是因爲任一大於 2 的整數 $n$，如果不是 4 的倍數，就一定是某個奇質數 $p$ 的倍數，當 $n$ 是 4 的倍數時，$x^{4m}+y^{4m}=z^{4m}$ 的無解可歸之於證 $x^4+y^4=z^4$ 無解，而這一點，已被數學家們證明。同樣地，當 $n$ 是 $p$ 的倍數時，則歸之於證 $x^p+y^p=z^p$ 無解。事實上，我們也只要證明這種情形是否存在 $xyz\neq 0$ 的解就行了。

我們繼續介紹福雷教授的工作。

如上所說，福雷教授假設費馬大定理不對，即存在整數 $a,b,c$（$abc\neq 0$）以及奇質數 $p$，使

$$a^p+b^p=c^p \tag{19}$$

福雷教授由此聯繫到一條橢圓曲線：

$$y^2=x(x-a^p)(x-c^p) \tag{20}$$

他研究了這個橢圓曲線的解所成的集合，發現這是一個除去一點的環面圈形狀的曲面，進一步他得到這樣一個猜想，即如果(20)所示的橢圓曲線存在，則它的解集所成的曲面能被複平面中的上半平面以某種特殊的方法掩蓋起來，這種特殊方法保持角度和某些映射函數不變。問題是，上面所說的環面圈形狀的曲面是否存在？如果能夠證明這樣的曲面不存在，則在(20)所示的橢圓曲面也不存在，從而 $a$，$b$，$c$，$p$ 就不能存在。這樣由此引出的矛盾就證明了費馬大定理。但是遺憾的是，到目前爲止，福雷教授以及其它許多著名的數學家，都未能給出證明。

數學家們經過三百多年的探索，耗費了無數的精力去解決的費馬大定理。現在似乎觸手可及，但又咫尺天涯，最後誰能解開這個難題還有待分曉，相信廣大青少年數學愛好者，會學習前人不畏艱難險阻，勇於攀登高峰的精神刻苦學習，堅忍不拔，爲數學學科的發展，做出不可磨滅的貢獻。

## 參考文獻


1. 吳文俊：≪九章算術≫與劉徽 1982 年

2. Gina Kolata: SCIENCE, VOL. 235 1572～1573

3. V. Dudley: *Elementary Number Theory* W. H. Freeman and Co. 1969

4. Paulo Ribenboim: 13 *Lectures on Fermat's Last Theoram* (1979) Springer-Verlag New York

5. 柯召、孫琦：談談不定方程，1980