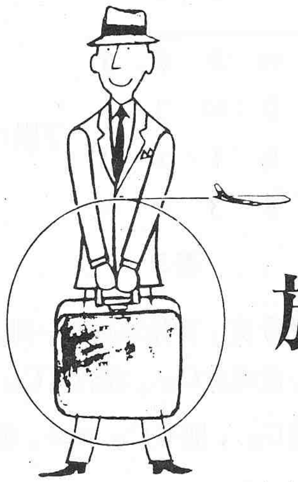


旅行業務員問題

劉涵初

旅行業務員問題（Traveling Salesman Problem）是個有名的難題，旅行業務員要到 n 個城市推展業務，n 個城市以 1，2，…，n 表示，從 1 出發，經過每個城市恰只一次，再回到 1，令 C_{ij} 表城市 i 到城市 j 的旅行成本，問題爲找出一個最小成本的路徑。在工廠的組合線上，以機器人上緊螺絲帽，機器人從起始的位置出發，做連續的移動，上緊每一個螺絲帽，再回到起始的位置，如何找一個最短的路徑？這亦是旅行業務員問題。這個問題難在那裏？我們看以下的四種解法。

(一)蠻力法(brute force method)

我們以最直覺的方法——計數來解，亦即找出所有可能的路徑，計算每條路徑的成本後，找出其最小者。那麼共有幾條路徑？因每一條路徑必形如 $1\rightarrow\cdots\rightarrow 1$，中間需經過 $n-1$ 個城市，故有 $(n-1)!$ 路徑，若 $n=26$，則有 25！條不同路徑，25！這個數字寫來輕鬆，究竟有多大？$25!\cong 1.55\times 10^{25}$，假設電腦每秒可計算 10^{6} 條路徑的成本（目前也許還做不到），一年有 3.15×10^{7} 秒，故一年可計算 3.15×10^{13} 條路徑，求出所有路徑的成本需時

$$\frac{1.55\times 10^{25}}{3.15\times 10^{13}}\cong 5\times 10^{11}\ (\text{年})$$

即使對不太大的 $n=26$，就需時五千億年，顯然這種方法毫無用處。

(二)分支界定法(brance-and-bound method)

旅行業務員問題的解可以樹形（tree）表示，例如 $n=4$，則圖 1 的樹形表示所有可能的 $3!=6$ 條路徑，例如，最右邊一條路徑爲 $1\rightarrow 4\rightarrow 3\rightarrow 2\rightarrow 1$。

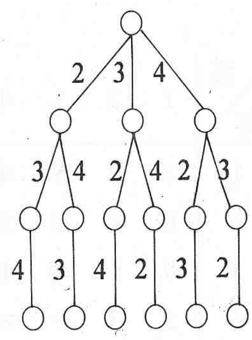


圖 1

在這問題中我們需找出最小成本路徑，分支界定法搜尋此最佳解的觀念爲，將樹形不斷分支，但隨時以問題的條件限制分支的持續，

亦即若知最佳解不會出現在經由此點的路徑，則不必繼續分支，因此所需搜尋的路徑將大爲減少。

考慮以下的例子，表1爲城市間的成本矩陣，例如 $C_{12}=3$ 表示城市1到城市2的旅行成本爲3，注意 C_{ij} 不一定等於 C_{ji}，在主對角線上的 $C_{ii}=\infty$，表示我們不需這些值。一個可能的路徑需矩陣中的4個表值，每一行且每一列恰有一個，又且，若選 C_{ij}，則不能選 C_{ji}；若選 C_{ij}、C_{jk}，則不能選 C_{ik}（爲什麼？），例如，表1中所圈的4個值表示路徑 $1\to2\to3\to4\to1$，成本爲 $C_{12}+C_{23}+C_{34}+C_{41}=3+6+6+9=24$

起＼迄	1	2	3	4
1	∞	3	9	7
2	3	∞	6	5
3	5	6	∞	6
4	9	7	4	∞

表1

首先，我們找此問題的一個下限，在成本矩陣中，若每一行（每一列）減去相同的值，，顯然，最低成本的路徑不會改變，故在第一列每項減3（該列中最小值爲3），第二列減3，第三列減5，第四列減4，得表2之成本矩陣，但現在成本比原來成本少 $3+3+5+4=15$。

起＼迄	1	2	3	4
1	∞	0	6	4
2	0	∞	3	2
3	0	1	∞	1
4	5	3	0	∞

表2

第四行可減1，故表3之成本矩陣較原問題少 $15+1=16$，因此這問題的解至少16，16爲下限。

起＼迄	1	2	3	4
1	∞	0	6	3
2	0	∞	3	1
3	0	1	∞	0
4	5	3	0	∞

下限＝16

表3

現在我們開始分支，首先考慮第一列，因 $C_{12}=0$ 爲最小，故考慮 C_{12}，我們選 C_{12} 或不選 C_{12}。若不選 C_{12}，則令 $C_{12}=\infty$，得表4。

起＼迄	1	2	3	4
1	∞	∞	6	3
2	0	∞	3	1
3	0	1	∞	0
4	5	3	0	∞

表4

表4中，第一列可減3，第二行可減1，故得表5，下限則爲 $16+(3+1)=20$

起＼迄	1	2	3	4
1	∞	∞	3	0
2	0	∞	3	1
3	0	0	∞	0
4	5	2	0	∞

下限＝20

表5

若選 C_{12}，則表3中第一列第二行不能再被使用，可刪去，C_{21} 亦不得被使用，故令 $C_{21}=\infty$，得表6。

起＼迄	1	3	4
2	∞	3	1
3	0	∞	0
4	5	0	∞

表6

第一列可減去1，故下限爲 16 + 1 = 17 ，如表7

起 \ 迄	1	3	4
2	∞	2	0
3	0	∞	0
4	5	0	∞

下限＝17

表7

目前樹形分支過程如圖2

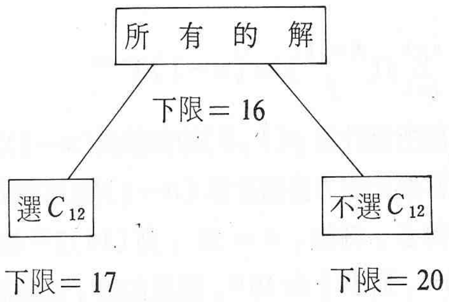


圖2

所以二元決策樹(binary decision tree)的每一內點表示：選C_{ij} 或不選C_{ij} 。現在因選C_{12} 下限17小於不選C_{12} 下限20 ，故接著對選C_{12} 分支，新選的表值不一定需與C_{12} 連接，亦即不一定需爲C_{j1} 或C_{2j} ，但爲簡單起見，我們選C_{2j} ，表7中因$C_{24} = 0$ ，故接著的分支爲選C_{24} 或不選C_{24} 。若不選C_{24} ，則表7中令$C_{24} =\infty$，第一列減2 ，故下限爲 17 + 2 = 19 。若選C_{24}，則表7中移去對應的行與列，又令$C_{41} =\infty$(否則得廻路 1 → 2 → 4 → 1)，故得表8下限仍爲17 。

起 \ 迄	1	3
3	0	∞
4	∞	0

下限＝17

表8

現在我們繼續分支，由表8可知，接著必得選C_{43} ，C_{31} (否則得∞)，因$C_{43} = C_{31} = 0$ ，故下限爲 17 ，而這條路徑 1 → 2 → 4 → 3 → 1 成本爲 3 + 5 + 4 + 5 = 17 正爲下限，故爲最佳解。以上全部的分支界定過程如圖3 。

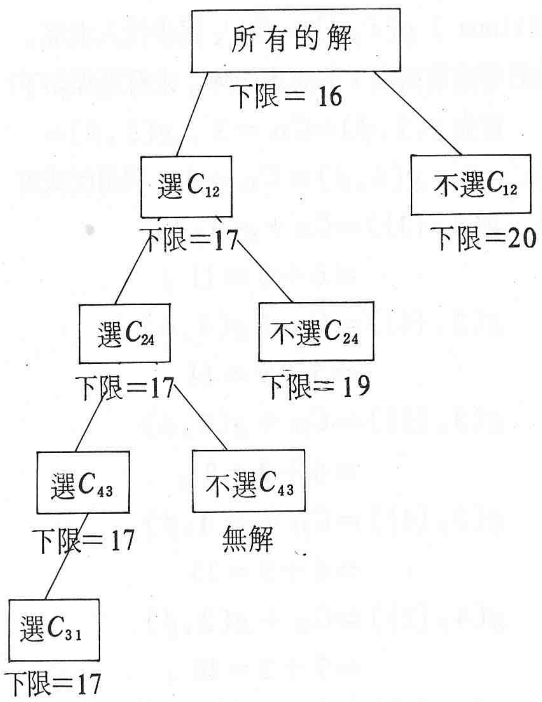


圖3

(三)動態規劃(Dynamic Programming)

令$V = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$表$n$個城市，$S \subseteq V$ ，$g(i, S)$ 表由頂點i出發，可經由S中所有頂點而抵達1的最佳路徑成本，故旅行業務員問題的解爲$g(1, V-\{1\})$ ，在最佳路徑中，若由1出發，下一個城市爲k ，則最佳路徑成本必爲C_{1k}加上由k到1的最佳路徑成本，故我們可得下式：

$$g(1, V-\{1\}) = \min_{2 \le k \le n} \{C_{1k} + g(k, V - \{1, k\})\} \quad (1)$$

將(1)式一般化，可得

$$g(i, S) = \min_{j \in S} \{C_{ij} + g(j, S-\{j\})\} \quad (2)$$

顯然$g(i, \phi) = C_{i1}$ ，$1 \le i \le n$ ，利用(2)式，可先求得所有$g(i, S)$，而$|S| = 1$ （S只含一個元素）；接著再求所有$g(i, S)$，而$|S| = 2$；……；最後求得$g(1, V-\{1\})$ 。當$|S| < n-1$時，只需計算$i \neq 1$ ，$1 \notin S$

，$i \not\in S$ 的 $g(i,S)$，這種動態規劃的求解方法爲建立遞廻關係（ recurrence relation ），亦即(2)式，再以起始條件（ initial conditions ）$g(i,\phi)=C_{i1}$，逐步代入求解，我們考慮前面表 1 的成本矩陣，求解過程如下:

首先 $g(2,\phi)=C_{21}=3$，$g(3,\phi)=C_{31}=5$，$g(4,\phi)=C_{41}=9$，利用(2)式可得

$$\begin{aligned} g(2,\{3\}) &= C_{23}+g(3,\phi) \\ &= 6+5=11, \\ g(2,\{4\}) &= C_{24}+g(4,\phi) \\ &= 5+9=14 \\ g(3,\{2\}) &= C_{32}+g(2,\phi) \\ &= 6+3=9, \\ g(3,\{4\}) &= C_{34}+g(4,\phi) \\ &= 6+9=15 \\ g(4,\{2\}) &= C_{42}+g(2,\phi) \\ &= 7+3=10, \\ g(4,\{3\}) &= C_{43}+g(3,\phi) \\ &= 4+5=9 \end{aligned}$$

接著計算 $g(i,S)$ 而 $|S|=2$，$i \neq 1$，且 $1 \not\in S$，$i \not\in S$

$$\begin{aligned} g(2,\{3,4\}) &= \min\{C_{23}+g(3,\{4\}), \\ &\qquad C_{24}+g(4,\{3\})\} \\ &= \min\{6+15,5+9\}=14 \\ g(3,\{2,4\}) &= \min\{C_{32}+g(2,\{4\}), \\ &\qquad C_{34}+g(4,\{2\})\} \\ &= \min\{6+14,6+10\}=16 \\ g(4,\{2,3\}) &= \min\{C_{42}+g(2,\{3\}), \\ &\qquad C_{43}+g(3,\{2\})\} \\ &= \min\{7+11,4+9\}=13 \end{aligned}$$

最後可得

$$\begin{aligned} g(1,\{2,3,4\}) &= \min\{C_{12}+g(2,\{3,4\}) \\ &\qquad ,C_{13}+g(3,\{2,4\}), \\ &\qquad C_{14}+g(4,\{2,3\})\} \\ &= \min\{3+14,9+16,7+13\} \\ &= 17 \end{aligned}$$

故最佳路徑成本爲 17，令 $J(i,S)$ 表(2)式中令 $g(i,S)$ 最小的 j 值，由 $g(1,\{2,3,4\})$ 可得 $J(1,\{2,3,4\})=2$，故最佳路徑爲 $1\rightarrow 2\rightarrow\cdots$，接著由 $g(2,\{3,4\})$ 可得 $J(2,\{3,4\})=4$，故最佳路徑爲 $1\rightarrow 2\rightarrow 4\rightarrow\cdots$，最後可得 $J(4,\{3\})=3$，故最佳路徑爲 $1\rightarrow 2\rightarrow 4\rightarrow 3\rightarrow 1$。

令 N 表求 $g(1,V-\{1\})$ 之前所需計算 $g(i,S)$ 的個數，對每一個 $|S|$ 之值，i 有 $n-1$ 種選擇，若 $|S|=k$，則不含 1 及 i 的 S 有 $\binom{n-2}{k}$ 種，故

$$N=\sum_{k=0}^{n-2}(n-1)\binom{n-2}{k}=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\binom{n-1}{k+1}$$

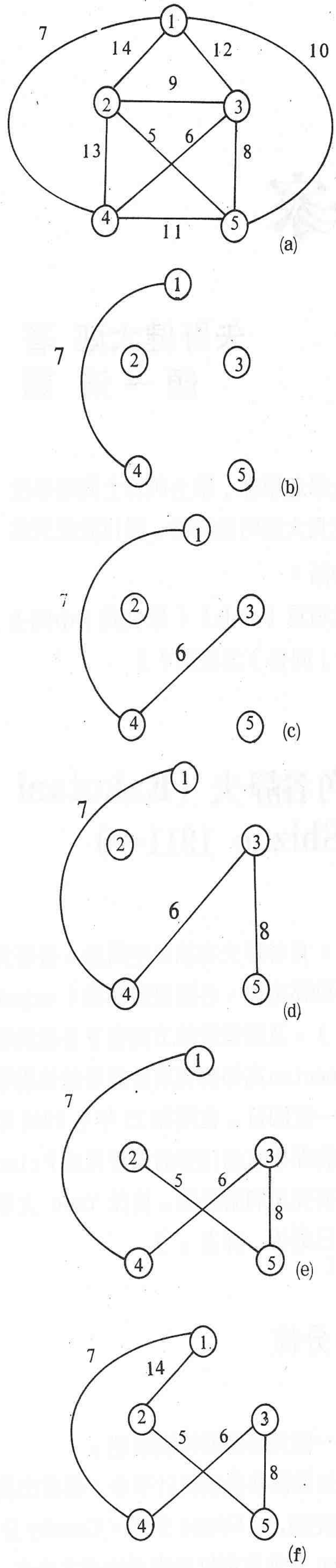
$$=\sum_{j=1}^{n-1} j\binom{n-1}{j}=(n-1)2^{n-2}$$

爲求解所需計算 $g(i,S)$ 的個數爲 $(n-1)2^{n-2}$，這當然比蠻力法需計算 $(n-1)!$ 條路徑成本要好得多，例如，$n=20$，則 $(19)2^{18}\cong 5\times 10^6$，而 $19!\cong 10^{12}$，雖然如此，以動態規劃求解，其計算複雜度（ computational complexity ）仍然呈指數上升，對目前及未來的計算機而言，一個計算複雜度呈指數上升的問題，在 n 相當大時仍無法解決，因此旅行業務員問題是個難題。（事實上這是個NP－Hard 問題）

(四)近似法

旅行業務員問題既是個難題，我們只得退而求其次找一個近似解，這種解法係從直觀而來，稱爲最近鄰居法（ nearest－neighbor method ）。

從城市 1 開始，先找最接近 1 的城市 x_1，次找最接近 x_1 的城市 x_2，再找最接近 x_2 的城市 x_3，……，直至找出所有的城市，將最後的一個城市與 1 連接，即得所求的路徑，例如圖 4 (a)，從 1 開始，根據最近鄰居法，過程如圖 4 (b)至圖 4 (f)，此路徑成本爲 40，而最小成本路徑如圖 4 (g)所示，成本爲 37 。



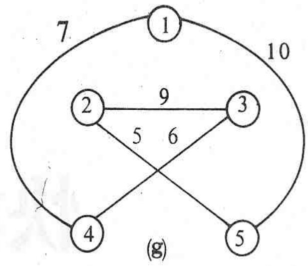


圖 4

若圖形含 n 個頂點，令 d 表根據最近鄰居法所求之路徑成本， d_0 表最佳路徑成本，當三角不等式成立時，亦即 $C_{ij}+C_{jk}\geq C_{ik}$ 恒成立，則可證明

$$\frac{d}{d_0}\leq\frac{1}{2}\lceil \log 2n\rceil+\frac{1}{2}$$

其中「 x 」表示大於或等於 x 的最小整數，證明參閱「 3 」第 160 頁或〔 1 〕第 129 頁，[1] 第 130 到 132 頁另介紹兩種近似法，其中最小生成樹法 (minimum spanning tree method) 可以保證 $\frac{d}{d_0}<2$ ，另外最小配對法 (minimum matching method) 則保證 $d/d_0<1.5$ 。

參考書目

1. Garey, M. and Johnson D. : " *Computers and Intractability,* " 1979 .
2. Horowitz, E. and Sahni, S. : " *Fundamentals of Computer Algorithms* , " Computer Science Press, 1978 .
3. Liu, C.L. : " *Elements of Discrete Mathematics,* " 2d. ed. McGraw-Hill, 1985 .
4. Tucker, A. : " *Applied Combinatorics* , " 2d. ed., John Wiley & Sons, 1984 .
5. 劉涵初：“離散數學”，華泰書局，1987。

（本文作者任教於逢甲大學統計系）