從雨量紀錄到無中生有

蕭文強

二十、三十多年前，香港街頭巷尾常聽到「樓下閂水喉！」的喊聲。在那些年頭，食水供應是個大問題，因爲當時香港旣乏水源，水塘設施又追不上需求。大家只好望天打掛，碰上乾旱年頭便苦了，還記得在1963年，由六月起持續一年以上每隔四天才有四小時自來水供應呢！在那些年頭，雨量紀錄可不僅是一些官方的紀錄數字，它影響民生至大。讓我們看看1951－1980這三十年間香港皇家天文台錄得的雨量紀錄（圖1），你有沒有留意到，某些年頭雨量之少（或多），是創過去歷年的紀錄？比方1953年的紀錄是2360.2 mm，是過去三年來（由1951年算起）的最低紀錄，但翌年這個紀錄便給“刷新”，該年的紀錄是1367.0 mm，到了1963年這個紀錄又給“刷新”，該年的紀錄只是901.1 mm。

在競技場上常出現運動員刷新紀錄的情形，我們對此只感敬佩卻不感驚訝，但換了是雨量頻創新低點，我們不只擔憂，還懷疑是否有什麼因素使天氣越變越乾旱呢？換句話說，如果天氣乾旱程度的變化是穩定的話，今年雨量多少與去年雨量多少沒什麼關係，也與明年雨量將有多少沒什麼關係，新低點（或高點）出現的頻率是穩定的。固然，我們不能確定那一年雨量創最低紀錄，但我們可以探討類似這樣的問題：「一個七十歲的人在一生中大概看到多少次雨量創最低紀錄呢？」（請你先猜一猜）。當然，那並非說每一個七十歲的人肯定看到同樣多次，只是說很大部份七十歲的人看到

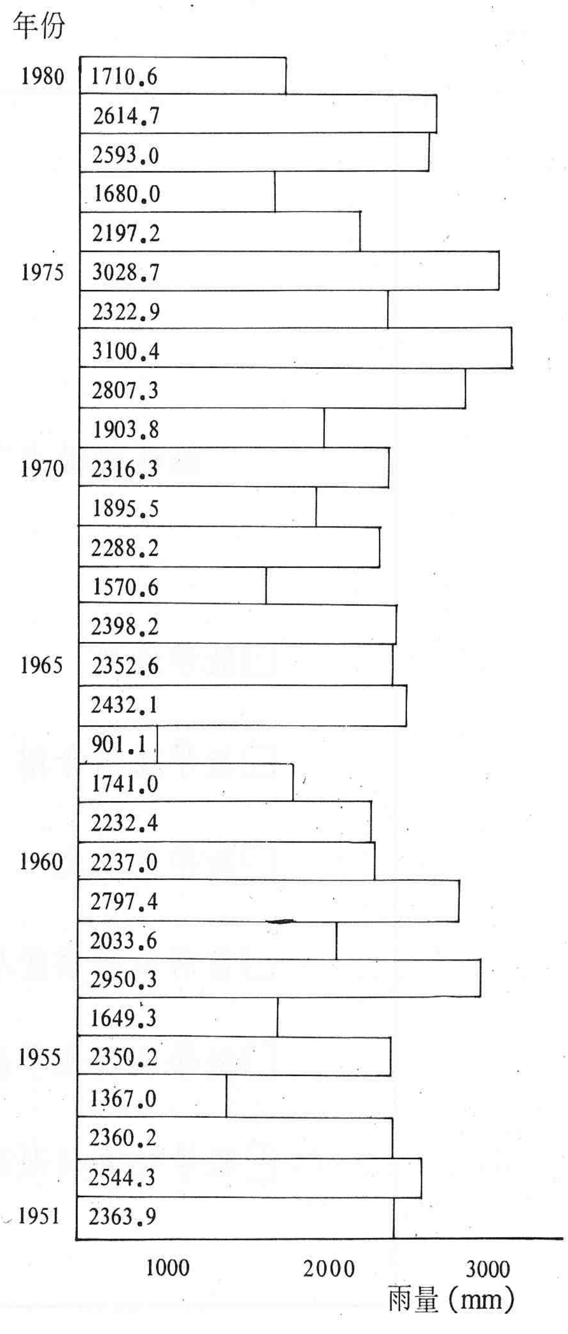

圖 1

那麼多次吧。而且，我們的預測是基於先前的假設，即是天氣乾旱程度的變化是穩定的。如果這假設不成立，預測也就不一定符合實際觀測結果的。其實，預測不符合實際觀測結果亦非壞事，至少我們因而知道先前的假設不成立，有需要進一步調查研究，例如察看是否環境汚染導致天氣反常呢？你看，數學的應用多美妙，做對了答案固然有用，做不對答案也一樣有用！

回到剛才的問題：「一個七十歲的人在一生中大概看到多少次雨量創最低紀錄呢？」熟悉概率論的朋友自然知道要計算的是某個隨機變量的數學期望值，不過，讓我試圖繞過術語，以簡單的語言解釋其中主要思想。讓我們逐年考慮，第一年不理雨量多少，它一定是最低紀錄，因爲沒前例可資比較，我們不妨說這樣算 1 分。第二年的雨量紀錄是新低點與否，視乎它比第一年的雨量紀錄少了抑多了。既然假定雨量多少是隨意的，兩種情況同樣可能發生，所以第二年雨量創最低紀錄的可能性是 $\frac{1}{2}$，合起來我們說兩年中不是得 2 分，也不是得 1 分，卻是得 $1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ 分。同樣道理，第三年雨量創最低紀錄的可能性是 $\frac{1}{3}$，三年中得分 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1\frac{5}{6}$ 分。這個數的意思是說：三年中有兩年雨量創最低紀錄的機會比較三年都創最低紀錄的機會大，也比三年中只有一年創最低紀錄的機會大。那個帶分數 $1\frac{5}{6}$ 是數學定量計算中避免不了的技術細節，你不妨把它理解成 2 。同樣道理，四年中得分 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2\frac{1}{12}$ 分，即是說還是很大機會其中兩年的雨量創最低紀錄。要回答起初的問題，只用計算 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{70}=4.83\cdots\cdots$，所以一個七十歲的人一生中大概看到 5 次雨量創最低紀錄。既然面前擺着三十年的雨量紀錄，不妨也計算三十年內大概有多少次雨量創最低（高）紀錄，按上述計算，是 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{30}=3.99\cdots\cdots$，約是 4 次。查看數據，果眞有 4 次最低紀錄，即是 1951 、 1953 、 1954 和 1963 年；也有 4 次最高紀錄，即 1951 、 1952 、 1957 和 1973 年。

以上的討論，還可應用於別的場合。設想面前放着一批強度不一的鋼條，怎樣找出最弱那支能承受多大應力呢？當然，你可以對每支施加應力，直至它承受不了折斷爲止，記下這個使它折斷的應力；試畢全部鋼條後，便知道這批數據中最小的一個是什麼。不過，答案雖找到，全部鋼條也得報廢！不如這樣辦，先對第一支鋼條施加應力，至它折斷爲止，記下這個使它折斷的應力 T_1 。對第二支施加應力，如果還沒達到 T_1 它已折斷，便記下這個使它折斷的應力；如果達到 T_1 它仍未折斷便停止，改試第三支。無論怎樣，設 T_2 是使第二支折斷的應力，我們找出 T_1 和 T_2 中最小的那個，記作 $\min(T_1, T_2)$。對第三支施加應力，如果還未達到 $\min(T_1, T_2)$ 它已折斷，便記下這個使它折斷的應力；如果達到 $\min(T_1, T_2)$ 它仍未折斷便停止，改試第四支。設 T_3 是使第三支折斷的應力，我們找出 T_1 ，T_2 和 T_3 中最小的那個，記作 $\min(T_1, T_2, T_3)$。餘此類推，全部試畢，便知道最弱的一支能承受多大應力了。讓我們估計一下在這種檢驗過程中大概折斷多少支鋼條，這個問題的實質與剛才雨量創最低紀錄毫無分別，只要把鋼條看成是一年，把鋼條承受的最大應力看成是該年的雨量紀錄，那麼，折斷的鋼條數目不正就是雨量創最低紀錄的次數嗎？計算與先前無異

，如果有1000 支鋼條，由於 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1000}=7.49\cdots\cdots$，約有7支或8支鋼條報廢，那只佔全部鋼條數目的百分之0.8而已。

讓我們換換口味，不講概率了。設想有一叠木板，每塊的尺寸和重量相同，要把它們叠成一道階梯，最遠能伸出多遠呢？我們可以這樣考慮，假定每塊木板長2（方便以下計算），先把全部木板放齊，然後把最上面一塊盡量推向右邊，它伸出1仍不翻跌，因爲重心沒有越過下面那塊，但只要向右邊多伸出一丁點它便翻跌的。不要再動第一塊，卻把最上面兩塊合起來考慮，它們的重心距第二塊的右端是½，所以它們可多伸出½，但再多伸出一丁點便翻跌了。不要再動第一、二塊，卻把最上面三塊合起來考慮，它們的重心距第三塊的右端是 $\frac{1}{3}$，所以它們可多伸出 $\frac{1}{3}$，但再多伸出一丁點便翻跌了（見圖2）。餘此類推，如果有N塊

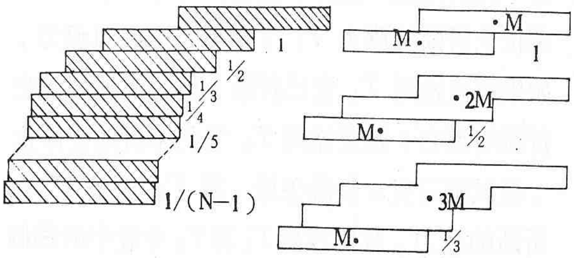

圖2

木板叠成階梯，最上面一塊的右端距最下面一塊的右端最遠可達 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(N-1)}$。把6塊木板這樣叠成階梯，最上面一塊伸出 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=2.28\cdots\cdots$，全部露出在最下面一塊的右邊。如果把100塊木板叠起來，最上面一塊伸出 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}=5.17\cdots\cdots$，更遠遠露出在最下面一塊的右邊，可叫人吃驚！

再來另一個問題：把一條長1000 m的橡筋帶的一端縛緊，另一端可伸展，帶上有隻螞蟻在爬行，每秒走1 cm。螞蟻從縛緊的一端開始走，每一秒後橡筋帶給伸展多1000 m，你猜螞蟻能否抵達另一端呢？我們看看第一秒後螞蟻走了多少路，它走了橡筋帶的 $\frac{1}{100000}$。第二秒後它走了橡筋帶的 $(1+\frac{1}{2})\times\frac{1}{100000}$，第三秒後它走了橡筋帶的 $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\times\frac{1}{100000}$，餘此類推。因此，要解決的問題是：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N}$這樣加下去（即是$N$一路增大），會否超過100000呢？

* * *

你一定已經留意到，在以上四個不同場合都出現一個傢伙，它就是這篇文章的主角，即是 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N}$。凡是這種由規定數項組成的和，叫做一個級數。我們的主角是個這樣的級數，第一項是1，第二項是 $\frac{1}{2}$，第三項是 $\frac{1}{3}$，……，第N項是 $\frac{1}{N}$。在數學上它頗有點名堂，叫做調和級數。雖然調和級數每項逐漸減小，我們快要看到，只要把足夠多的項相加，級數的值卻要多大可有多大。也許有人說：「那何足爲奇，既然每項是正數，自然越加越大了。」且慢，讓我們剔掉某些數項，只剩下1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{16}$、……，即是考慮級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{N-1}}$，它其實等於 $2(1-\frac{1}{2^N})$。當我們把越來越多項相加時，N越來越大，$\frac{1}{2^N}$ 越來越小，所以級數越來

越接近2，但總不會超過2，又怎能要多大可有多大呢？你或會說：「是否我們剔掉太多數項了？」好吧，讓我們只剔掉那些分母含有9這個數字的數項，即是剔掉$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{19}$、$\frac{1}{29}$、…、$\frac{1}{89}$、$\frac{1}{90}$、$\frac{1}{91}$、……、$\frac{1}{99}$、$\frac{1}{109}$、$\frac{1}{119}$、……，你猜有什麼後果？它還是不能要多大可有多大，事實上，用較多的數學知識，能計算到它越來越接近22.92……。讓我們再換另一個剔掉數項的辦法，這次剔掉所有分母是合成數的數項，餘下$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+$……。看起來這次好像比上一次剔掉更多數項，事實不然，這次的級數又是要多大可有多大！肉眼是不易看到，用簡單計算也是不易解釋，即使你有能耐把起首的五千萬項相加，答案仍不超過4，但理論上的確能證明把足夠多項相加，要多大它可有多大！這個既漂亮且重要的定理，與質數的分佈有關，是十八世紀瑞士大數學家歐拉（EULER）發現的。我們沒法在這裏講解證明了，不如回到調和級數，看看爲什麼它要多大可有多大吧。

把調和級數分組，第一組是1，第二組是$\frac{1}{2}$，第三組是$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，第四組是$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$，第五組是$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}$，餘此類推。注意第一組不小於$\frac{1}{2}$，第二組不小於$\frac{1}{2}$，第三組不小於$\frac{1}{2}$，第四組不小於$\frac{1}{2}$，第五組不小於$\frac{1}{2}$，餘此類推。所以$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$不小於$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$。這裏的“……”是個偷懶的寫法，如果仔細一些，應該說$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^N}$不小於$1+\frac{N}{2}$。當$N$越來越大時，$1+\frac{N}{2}$越來越大，級數的值也就越來越大，且要多大可有多大。這樣巧妙的證明，是法國數學家奧力森（ORESME）在1360年發現的。（你現在可回答螞蟻在橡筋帶上走的問題了。）

讓我試用一個幾何形象的描述，假想有一套（無窮多個）正方形，邊長分別是1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、……。把它們一個挨一個排隊，排成一條無窮長的長龍。你信不信我能把這條無窮長的長龍收起來，全部（不重叠地）放在第一個正方形裏面呢？有一個這樣的放法（見圖3），我們肯定這是辦得到的，是因爲我們知道1大於$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，1大於$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，1大於$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{15}$，餘此類推，而且也知道$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots)=1$。這也說明了另一回事，即是調和級數的值雖然要多大可有多大，它的增長卻是異常緩慢的。以上的計算，其實證明了

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^N-1)}$$

不大於N（$N\geq1$）。這涉及一個很有意思的問題：至少要把調和級數多少項相加，答案才

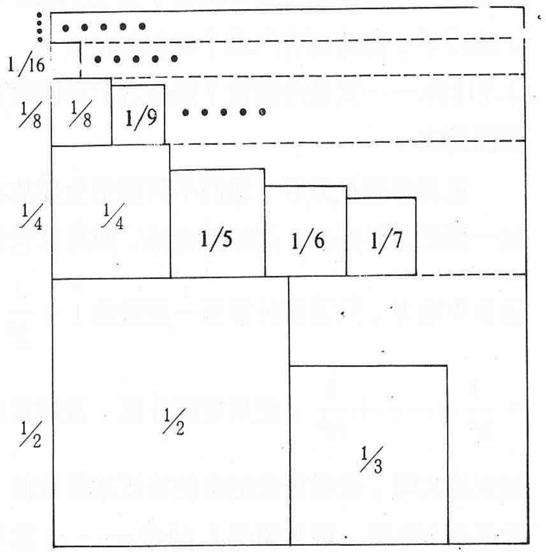

圖 3

超過某給定值呢?給定一個正整數M,假定至少把$N(M)$項相加調和級數的值才超過M。不難知道$N(1)=2$,$N(2)=4$,$N(3)=11$,下面的表(見圖4)列舉更多的數據。

M	$N(M)$	$\frac{N(M+1)}{N(M)}$
1	2	2
2	4	2.75
3	11	2.81818 ………
4	31	2.67741 ………
5	83	2.73493 ………
6	227	2.71365 ………
7	616	2.71353 ………
8	1674	2.71804 ………
9	4550	2.71802 ………
10	12367	2.71828 ………
11	33617	2.71826 ………
12	91380	2.71828 ………
13	248397	2.71828 ………
14	675214	2.71828 ………
15	1835421	

圖 4

你看到什麼趨勢嗎?是否好像每一個$N(M)$是前一個的三倍少一點?不如索性驗算$\frac{N(M+1)}{N(M)}$,把其值並列於表上。看來,當M越來越大時,這個比率越來越接近某個數,是2.71828…。湊巧乎,抑或別有內因?這個神秘數字2.71828……又是什麼數?遲些我們要回到這個問題去。

重看那套正方形,我們不只能把全部放在第一個正方形裏面,還綽綽有餘。要計算它們佔多少地方,只需要計算另一個級數$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{N^2}$。使用電腦計算,看到當$N$越來越大時,級數好像越來越接近某個數值;當$N$是100時,級數值是1.6349…… ;當$N$是500時,級數值是1.6429…… ;當$N$是1000時,級數值是1.6439…… ;當$N$是2000時,級數值是1.6444…… ;當$N$是5000時,級數值是1.6447……。早在1734年,歐拉已找着答案,這個數原來是$\pi^2/6=1.64493\cdots\cdots$!值得一提者,是歐拉初時用一個既大膽又巧妙的手法,不依循正規章法獲得答案。但因爲他用這種手法獲得很多類似的公式,其中有些與別的數學家循別的途徑獲得的答案是一樣,令他增強了信心,終於下工夫在幾年後使用合乎章法的手段證明了這些公式是對的。這種工作作風,值得我們學習,一方面任由想像力翺翔天際,另一方面卻一絲不苟追求嚴謹的證明。以下讓我們品嘗一下歐拉的"怪招"。但未講解之前,必須先弄清楚一些準備知識。

如果α是方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$($a_n\neq 0$和$a_0\neq 0$)的根,則$\frac{1}{\alpha}$是方程$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}y+a_n=0$的根。例如,$x=3$是$2x^3-5x^2-4x+3=0$的根,$y=1/3$是$3y^3-4y^2-5y+2=0$的根。因此,如果$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$是該方程的全部根,則$\frac{1}{\alpha_1},\cdots\cdots,\frac{1}{\alpha_n}$是另外那條方程的全部根,從而$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}y+a_n=a_0(y-\frac{1}{\alpha_1})\cdots\cdots(y-\frac{1}{\alpha_n})$,所以$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{a_1}{a_0}$。例如$2x^3-5x^2-4x+3=0$的全部根是$x=-1,\frac{1}{2},3$,所以$3y^3-4y^2-5y+2=0$的全部根是$y=-1,2,\frac{1}{3}$,因而$-1+2+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=-\frac{-4}{3}$。其次,正弦函數$\sin z$當且僅當$z=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots\cdots$時才取零值。在歐拉的時代,數學家喜歡以無窮級數表示函數

，歐拉便曾證明了一個漂亮的級數表示式 $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots\cdots$（這裏的 $n!$ 表示 n 的階乘，例如 $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$，$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$）。這一次右邊的"……"可非偷懶的寫法，而是一種簡寫，表示右邊越多數項相加，答案便越接近左邊的值，而且要多接近可有多接近。用今天的術語，我們說右邊的無窮級數收斂，趨於左邊的函數爲極限。在歐拉的時代，數學家可未曾弄清楚這一回事，不是這樣嚴謹地理解它。歐拉把右邊看成是個多項式，只不過它有很多很多項吧！他考慮 $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\cdots = 0$ 這個"無窮方程"，撇開 $z=0$ 不計，便知道 $z = \pm\pi$，$\pm 2\pi$，……是 $1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\cdots = 0$ 的全部"根"。換 z^2 作 y，得另一"無窮方程" $1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \cdots\cdots = 0$，它的全部"根"是 π^2，$2^2\pi^2$，$3^2\pi^2$，……。按照以上提到的公式，歐拉猜測應成立 $\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots\cdots = -\frac{(-1/3!)}{(1)} = \frac{1}{6}$，即是 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6}$。這答覆了我們的問題，在大正方形裏面的正方形面積總和是 $\frac{\pi^2}{6} - 1$，只佔大正方形約六成面積吧，不是綽綽有餘嗎？

* * *

歐拉對級數極感興趣，且精於此道，發現了不少優美的定理，以下再介紹一個與調和級數有關的重要結果。先看由函數 $y = \frac{1}{x}$ 定義的曲線（直角雙曲線）的圖，圖中曲線底下由 $x = 1$ 至 $x = N$ 圍成的面積叫做 $\log_e N$（見圖5），例如 $\log_e 1 = 0$，$\log_e 2 = 0.69\cdots\cdots$，$\log_e 3 = 1.09\cdots\cdots$，$\log_e 20 = 2.99\cdots\cdots$。我們用上 $\log_e$ 這記號，是因爲它的確具備對數的性質，而對數的數學記號正是 log。這裏的 e 叫做該對數的底，在這情況下是個值爲

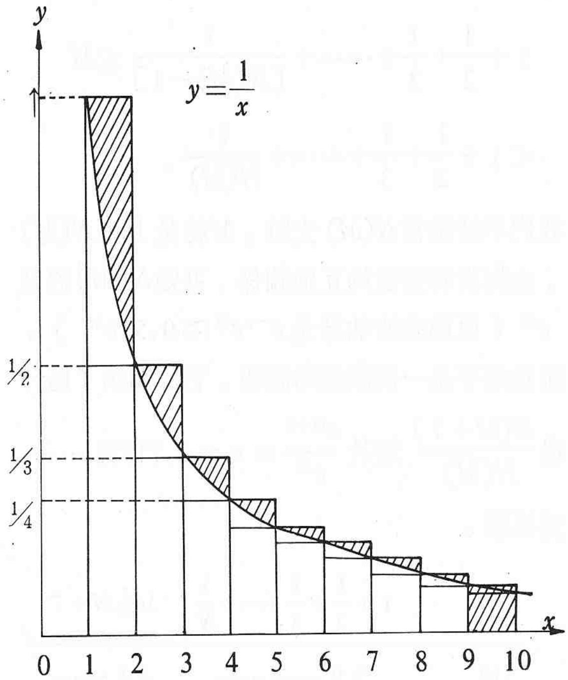

圖 5

2.71828……的常數。要弄清楚對數和指數的關係，必須花相當篇幅，這裏就不談了，讓我們繼續採用剛引入的幾何解釋吧。從圖中不難看到

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{(N-1)} > \log_e N > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{N} \ (N \geq 2),$$

所以 $1 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{N} - \log_e N > 0$。而且，隨 N 增大，$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{N} - \log_e N$ 也增大（等於圖中劃了斜線的部份），有理由相信它越來越接近某個常數。事實上，真的有數學定理保證這回事，那個常數通常記作 γ，稱爲歐拉常數，它的值是 0.5772……。時至今日，我們對 γ 的"廬山眞面目"仍不瞭解。雖然我們知道超過二萬個小數位的值，

卻仍沒法肯定γ究竟是有理數抑無理數！不過，這已提供一個計算調和級數近似值的快速辦法。當N是大時，不妨就以$\log_e N+\gamma$作爲調和級數的值。我們對$\log_e N$（稱爲N的自然對數）知道得很清楚了，以下是一些近似值與眞值的比較，相當準確的（見圖6）。又因爲

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{[N(M)-1]}\leq M$$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N(M)},$$

我們不妨說當$N(M)$大時，M約是$\log_e N(M)$，由對數和指數的互逆關係，可知$N(M)$約是e^M（更準確的估計是$e^{-\gamma}e^M\approx 0.56e^M$）。雖然這不是一個嚴謹的證明，它卻顯示了爲什麼$\dfrac{N(M+1)}{N(M)}$趨於$\dfrac{e^{M+1}}{e^M}=e=2.71828\cdots\cdots$爲極限。

N	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$	$\log_e N+\gamma$
10	2.9 …………	2.8 ……
100	5.187 ………	5.182 …
1000	7.485 ………	7.484 …
10000	9.7876 ……	9.7875 …

圖 6

其實，即使x不是正整數，只要它是正數，以上關於$\log_e x$的敍述完全有效。十七世紀的數學家已經對這個函數產生興趣，牛頓（NEWTON）和梅卡托（MERCATOR）分別在1665年和1668年發現一個漂亮的無窮級數表示式$\log_e(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots(-1<x\leq 1)$。置$x=1$，得到級數$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots=\log_e 2=0.69\cdots\cdots$。驟看去，左邊級數與調和級數無大分別，只是隔項變加作減吧，然而這卻帶來質的變化，調和級數要多大可有多大，這個級數卻趨於某數爲極限。由此可見級數是個狡滑的傢伙。在十七和十八世紀期間，級數的確引起很多謬誤和困惑，當時的數學家摸它不透，有時得到正確的答案，有時卻得到無稽的結果。一個十分著名的例子是$1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$這個級數，引起極多爭論。有人認爲答案是0，因爲它是$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots=0+0+0+\cdots\cdots=0$；有人認爲答案是1，因爲它是$1-(1-1)-(1-1)\cdots\cdots=1-0-0-\cdots\cdots=1$；還有人認爲答案是$\dfrac{1}{2}$，因爲若假定它是$S$，則$S=1-(1-1+1-1+\cdots\cdots)=1-S$，即是$2S=1$，故$S=\dfrac{1}{2}$。睿智如歐拉也感到混亂，但他認爲既然$\dfrac{1}{1-x}$是$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$，那麼置$x=-1$，應有$\dfrac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots\cdots$，所以主張答案是$\dfrac{1}{2}$。但那怎麼可以呢？如果上述計算是對的，那麼便有$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots=1-1+1-1+\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}$，豈非"無中生有"嗎？眞的，在1703年有位意大利數學家格蘭弟（GRANDI）用這種計算宣稱他證明了世界是從空無一物創造出來的！

不過，我們不應嘲笑這些過去的謬誤，因爲過去有過去的謬誤，今天有今天的謬誤，將來也一定有將來的謬誤，但正是這些謬誤促使我們產生懷疑，激勵我們勇敢面對挑戰，帶引我們邁向深入的瞭解，也因而揭示了更多的困惑，爲後來的人提供更大的挑戰。數學發展，便是如此繼往開來。十九世紀數學家面對上兩個世紀遺留下來關於級數的困惑，促使他們爲微積分建立嚴謹的理論基礎，發展了數學分析這門領域，使我們今天對級數明白得更透澈，運用得更純熟。讓我引朱熹的一段話作結：「讀書無疑者須教有疑。有疑者卻要無疑。到這裏方是長進。」

（本文作者任教於香港大學數學系）