以複數爲座標的解析幾何淺論(I)

第一章 直線方程式

許振榮・呂素齡

前 言

在複變函數論中，我們把平面上的各點以一複數來表示，並視平面上的無限遠只爲一點，即無限遠點∞。這方法對於討論平面幾何時也相當有效，尤其是對於平面反轉幾何(inversive geometry)之討論特別方便。筆者之一曾在東吳大學演講和本文相關的內容，講題是「複素數在平面幾何上之應用——從Miquel定理到Clifford鏈」，學生筆記後刊登在「東吳數學」雜誌(民國七十一年五月出版，東吳數學會)上。之後筆者又利用複數給了Ptolemy定理的證明(參看「關於Ptolemy的定理」數學傳播第七卷第三期，72年9月)。楊重駿先生也曾在「數學傳播」上爲文討論(請參見「複數及其應用」數學傳播第七卷第四期(72年12月)和第八卷第一期(73年3月))複數及其應用。

因爲我們常常需要應用以複數爲座標的更系統的解析幾何，我們想預備一些事項，其中最基本的是直線方程式、圓方程式、二次曲線方程式等等。這些可以很容易推導出來。其中一種方法是利用 $z=x+iy$，$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$iy=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$，從普通解析幾何的結果改爲以複數爲座標的解析幾何的結果。例如，在普通解析幾何的直線方程式代入上述第二、三關係式，則可得到以複數爲座標的解析幾何中的直線方程式。另外也可以利用複數的向量性和其乘除法之性質而得的。例如，用偏角的性質就可得三點爲共線之條件。今後本文的討論中此二方法均使用。

這一方面，有下列的書籍可供參考。筆者寫本文時，很多地方參考了小林幹雄的書。

(1)小林幹雄：複素數の幾何學，東海書房，1953。

(2)梅澤敏夫：複素數と非ユークリッド幾何學，槇書店。

(3) I.M. Yaglom：*Complex numbers in geometry*，Academic Press，1968。

(4) Frank Morley & F.V. Morley：*Inversive geomety*. London，C. Bell & Sons，1933。

(5) H. Schwerdtfeger：*Geometry of complex numbers*，Math. Exposition No. 13. Toronto, Univ. of Toronto Press，1962。

(6) R. Deaux：*Introduction à la geometrie des nombres complexes*, Bruxelles, A. de Boeck 1947。

(7)Walter Benz : *Vrlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer Verlag. 1973。
(8)P.S. Modenov, *Problems in Geometry*, translated from Russian by George Yankovsky, MIR Publishers, Moscow 1981 第 3，第 4 兩章。(此書蒙清大全任重教授告知，謹此致謝）。

§1.1 二點間距離，三角形面積

設 A_0，A 爲任意二點，其座標分別爲 z_0、z，又設 $z-z_0=re^{i\theta}$ 此處 r 爲線段 $\overline{A_0A}$ 之長度，則 $\overline{z}-\overline{z_0}=re^{-i\theta}$。因此 $(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})=r^2=|z-z_0|^2$

故 $r=|z-z_0|=\sqrt{(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})}$

設 A_0，A_1，A_2 爲平面上三點，其座標分別爲 z_0、z_1、z_2。又設 $z_1-z_0=r_0e^{i\theta}$，$z_2-z_0=r_2e^{i\theta_2}$，$\theta_2-\theta_2=\theta=\angle A_1A_0A_2$，則 $\triangle A_0A_1A_2$ 之面積爲 $\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta$。因爲

$$\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{r_2}{r_1}e^{i\theta}$$

$$=\frac{r_2}{r_1}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}-\frac{\overline{z_2}-\overline{z_0}}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}=2\frac{r_2}{r_1}i\sin\theta\ ,$$

又 $r_1^2=(z_1-z_0)(\overline{z_1}-\overline{z_0})$，故得

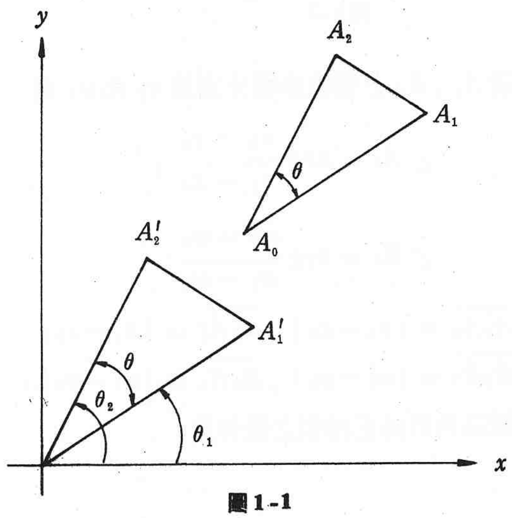

圖1-1

$$\triangle ABC\text{之面積}=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta$$

$$=-\frac{i}{4}\left(\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}-\frac{\overline{z_2}-\overline{z_0}}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}\right)(z_1-z_0)(\overline{z_1}-\overline{z_0})$$

$$=-\frac{i}{4}[(z_2-z_0)(\overline{z_1}-\overline{z_0})-(\overline{z_2}-\overline{z_0})(z_1-z_0)]$$

另一方面

$$=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_0 & \overline{z_0} & 1\\ z_1 & \overline{z_1} & 1\\ z_2 & \overline{z_2} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_0 & \overline{z_0} & 1\\ z_1-z_0 & \overline{z_1}-\overline{z_0} & 0\\ z_2-z_0 & \overline{z_2}-\overline{z_0} & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{i}{4}[(z_2-z_0)(\overline{z_1}-\overline{z_0})-(z_1-z_0)(\overline{z_2}-\overline{z_0})]$$

因此，

$$\triangle ABC\text{之面積}=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_0 & \overline{z_0} & 1\\ z_1 & \overline{z_1} & 1\\ z_2 & \overline{z_2} & 1\end{vmatrix}$$

如果 $z_j=x_j+iy_j$，$j=0,1,2$ 此公式亦可在普通解析幾何的公式

$$\triangle ABC\text{之面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

中以 $x_j=\frac{1}{2}(z_j+\overline{z_j})$，$y_j=-\frac{i}{2}(z_j-\overline{z_0})$ 代入得之。

由此公式可得：三點 z_0，z_1，z_2 爲共線之條件爲

$$0=\begin{vmatrix} z_0 & \overline{z_0} & 1\\ z_1 & \overline{z_1} & 1\\ z_2 & \overline{z_2} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} z_0 & \overline{z_0} & 1\\ z_1-z_0 & \overline{z_2}-\overline{z_0} & 0\\ z_2-z_0 & \overline{z_2}-\overline{z_0} & 0\end{vmatrix}$$

$= [(z_1 - z_0)(\overline{z_2} - \overline{z_0}) - (z_2 - z_0)(\overline{z_1} - \overline{z_0})]$

之成立。此條件可寫成

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}$$

即 $$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

為一實數。即三點 z_0, z_1, z_2 為共線之條件為 $\arg(z_2 - z_0)$(即 $z_2 - z_0$ 之偏角)$= \arg(z_1 - z_0)$。

由上述結果又可得：經過二點 z_1, z_2 之直線方程式(即直線上任一點之複數座標 z 滿足的方程式)為

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即 $$(\overline{z_1} - \overline{z_2})z - (z_1 - z_2)\overline{z} = (z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2})$$

因此，經過二點 z_0 $(\neq 0)$ 和 O(原點)之直線方程式為

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_0 & \overline{z_0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即 $$\overline{z_0}z - z_0\overline{z} = 0$$

此式可寫成

$$z - \left(\frac{z_0}{\overline{z_0}}\right)\overline{z} = 0 \text{。}$$

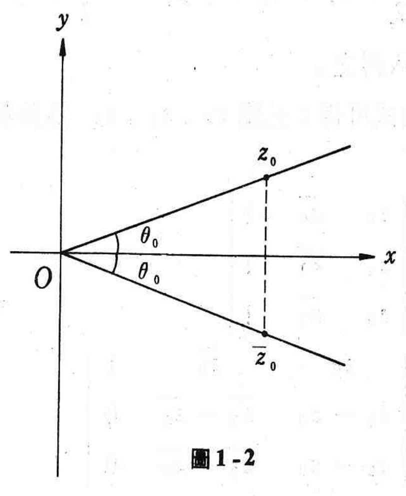

圖1-2

設 $a = \left(\dfrac{z_0}{\overline{z_0}}\right)$，因 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$，$\overline{z_0} = r_0 e^{-i\theta_0}$ 故 $a = e^{2i\theta_0}$。

故直線 Oz_0 之方程式可寫式

$$z - e^{2i\theta_0}\overline{z} = 0$$

之形狀。此處 θ_0 為近線 Oz_0 與 x 軸所夾之角。

§1.2 二個三角形為正(或逆)相似的條件

二個三角形 $\triangle A_0A_1A_2$ 和 $\triangle B_0B_1B_2$ 為**正相似**的條件為

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{B_0B_1}} = \frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{B_0B_2}}$$

且 $\angle A_0 = \angle B_0 = \theta_0$ 成立。即

$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1}} = \frac{\overline{B_0B_2}}{\overline{B_0B_1}}$$

和 $\angle A_0 = \angle B_0 = \theta_0$ 之成立。

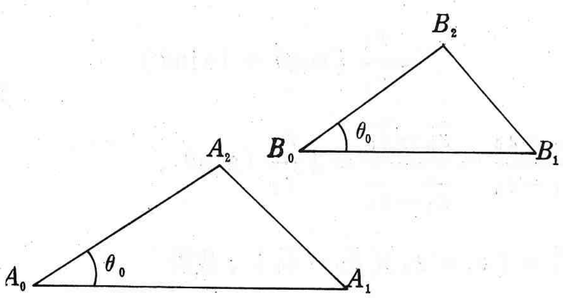

圖1-3

設 A_j，B_j 之複數座標分別為 z_j 和 w_j 則

$$\angle A_0 = \arg\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0},$$

$$\angle B_0 = \arg\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0}$$

且 $\overline{A_0A_2} = |z_0 - z_0|$，$\overline{A_0A_1} = |z_1 - z_0|$

$\overline{B_0B_2} = |w_2 - w_0|$，$\overline{B_0B_1} = |w_1 - w_0|$。

故二個三角形為正相似之條件為

$$\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{w_2-w_0}{w_1-w_0}$$

之成立。因爲

$$\begin{vmatrix} z_0 & w_0 & 1 \\ z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} z_0 & w_0 & 1 \\ z_1-z_0 & w_1-w_0 & 0 \\ z_2-z_0 & w_2-w_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(z_1-z_0)(w_2-w_0)-(z_2-z_0)(w_1-w_0)$$

二個三角形爲正相似的條件可寫成

$$\begin{vmatrix} z_0 & w_0 & 1 \\ z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

其次假設$\triangle B_0B_1B_2$與$\triangle A_0A_1A_2$爲逆相似。又設B_j，$j=0,1,2$關於x軸之對稱點分別爲B_j，$j=0,1,2$，則B_j之複數座標分別爲w_j，而$\triangle A_0A_1A_2$和$\triangle B_0B_1B_2$爲正相似。故$\triangle A_0A_1A_2$與$\triangle B_0B_1B_2$爲**逆相似**的條件爲

$$\begin{vmatrix} z_0 & \overline{w_0} & 1 \\ z_1 & \overline{w_1} & 1 \\ z_2 & \overline{w_2} & 1 \end{vmatrix}=0$$

之成立。

利用二個三角形之相似條件可得直線之方程式之另一求法。

設如圖1.4，二點z_1、z_2（即以z_1、z_2爲複素座標的二點）關於直線g成對稱，且二點a_1、a_2亦關於直線g成對稱，則$\triangle z_1a_1a_2$和$\triangle z_2a_2a_1$爲逆相似。故

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_2} & 1 \\ a_1 & \overline{a_2} & 1 \\ a_2 & \overline{a_1} & 1 \end{vmatrix}=0$$

當點z在線段a_1a_2之垂直平分線上時$z_1=z_2\equiv z$成立。故

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a_1 & \overline{a_2} & 1 \\ a_2 & \overline{a_1} & 1 \end{vmatrix}=0$$

爲線段a_1a_2之垂直平分線之方程式。當$a_1=0$（原點），$a_2=a$時

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ 0 & \overline{a} & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

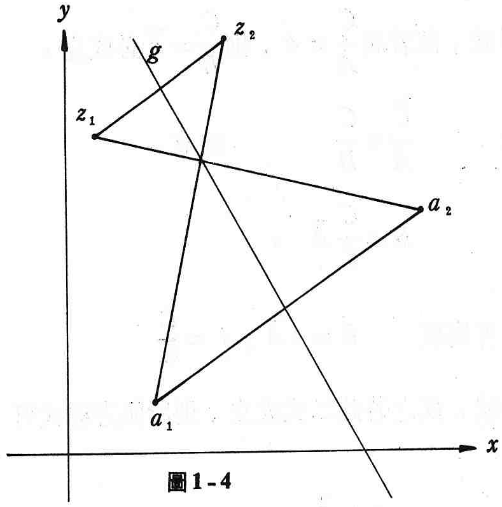

圖1-4

爲線段Oa之垂直平分線之方程式。此方程式可寫成下列形狀：

$$\overline{a}z+a\overline{z}=a\overline{a}$$

即
$$\frac{z}{a}+\frac{\overline{z}}{\overline{a}}=1$$

以後我們把不經過原點之直線都寫成此形狀。經過原點的直線都寫成下列形狀

$$z-e^{2i\theta}\overline{z}=0$$

此處θ爲x軸至所考慮直線的角。

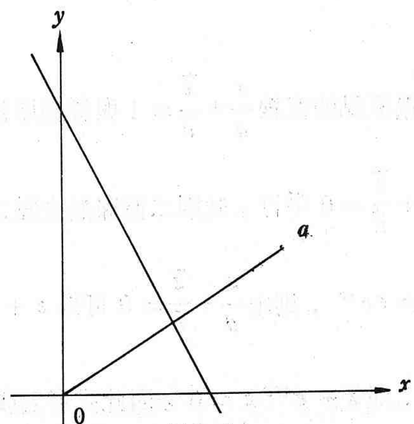

圖1-5

其次，假設$Az+B\overline{z}=C$表一不經過原點的直線，則$C\neq 0$。又$A\neq 0$，$B\neq 0$。因如$B=0$，則得$Az=C$。故$A\neq 0$，此時$z=\frac{C}{A}$僅表一點之故。因此所與方程式可寫成

$$\frac{z}{C/A}+\frac{z}{C/B}=1$$

之形狀。因不經過原點之直線均可表成

$$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1$$

之形狀，故若設$\frac{C}{A}=a$，則$\frac{C}{B}=\bar{a}$必成立。

因此 $\frac{\bar{C}}{\bar{A}}=\frac{C}{B}$ 成立。

即 $B=\frac{C}{\bar{C}}\bar{A}$ 。

故B可寫成 $B=t\bar{A}$，$t=\frac{C}{\bar{C}}$

之形狀。反之若此二式成立，則所與方程式可寫成

$$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1,$$

$$\frac{C}{A}=\alpha \qquad \bar{\alpha}=\frac{\bar{C}}{\bar{A}}=\frac{C}{t\bar{A}}$$

故表一不經過原點的直線。

§1.3 經過所與點與所與直線成角θ的直線方程式

不經過原點的直線$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1$與經過原點的直線$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=0$平行，此因二直線無交點之故。設$a=re^{i\theta}$，則由$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=0$可得$z+\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}=0$，即$z+e^{2i\theta}\bar{z}=0$。因此式可寫成$z-e^{2i(\theta+\frac{\pi}{2})}\bar{z}=0$之形狀，此直線與$x$軸所成之角爲$\theta+\frac{\pi}{2}$。

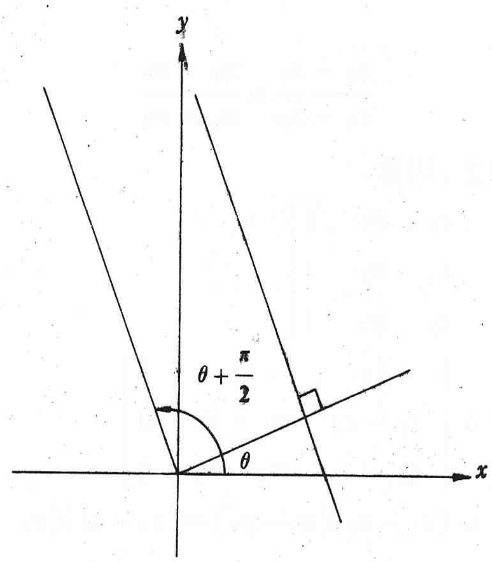

圖 1-6

設$z-e^{2i\varphi}\bar{z}=0$，即$\frac{a}{\bar{a}}=-e^{2i\varphi}$爲經過原點與所與直線平行的直線。經過原點與此直線成角θ之二直線之方程式分別爲

$$z-e^{2i(\varphi+\theta)}\bar{z}=0$$

和 $$z-e^{2i(\varphi-\theta)}\bar{z}=0$$

即分別爲

$$z-e^{2i\theta}(-\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}=0$$

和 $$z-e^{-2i\theta}(-\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}=0$$

現在來求經過z_0與直線$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1$（或$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=0$）成角$\theta$之直線之方程式。

由上面的討論得知其方程式爲

$$z-e^{2i\theta}(-\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}=z_0-e^{2i\theta}(-\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}_0$$

即爲

$$z+e^{2i\theta}(\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}=z_0+e^{2i\theta}(\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}_0$$

或爲

$$z+e^{-2i\theta}(\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}=z_0+e^{-2i\theta}(\frac{a}{\bar{a}})\bar{z}_0$$

故經過點 z_0 與直線$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1$平行的直線之

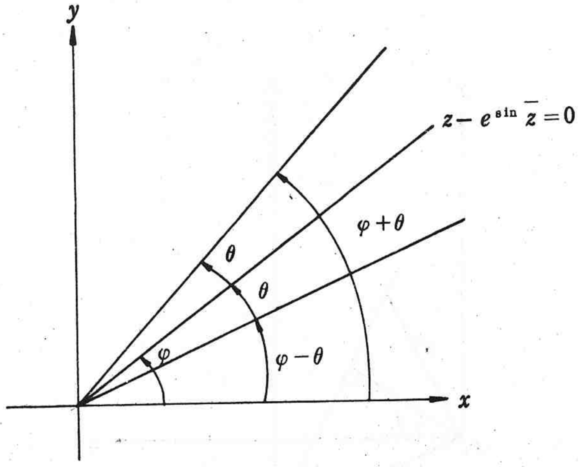

圖1-7

方程式爲（$\theta=0$）

$$z+\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}=z_0+\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}_0\text{ 。}$$

經過點 z_0 與直線$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1$垂直的直線之方程式爲（$\theta=\frac{\pi}{2}$）

$$z-\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}=z_0-\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}_0$$

§1.4 從點至一直線所作的垂線之垂足的座標，從一點至一直線的距離

設所與點P_0之座標爲 z_0 ，所與直線之方程式爲

$$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=1$$

此處 $a=2pt$ ， $t=\cos\theta+i\sin\theta$

設 $z=z_0+z'$

則 z' 爲點關於以P_0爲原點，二軸與原來的二軸平行的新座標系的複數座標。因

$$\frac{z_0+z'}{a}+\frac{\bar{z}_0+\bar{z}'}{\bar{a}}=1$$

故所與直線關於新座標系的方程式爲

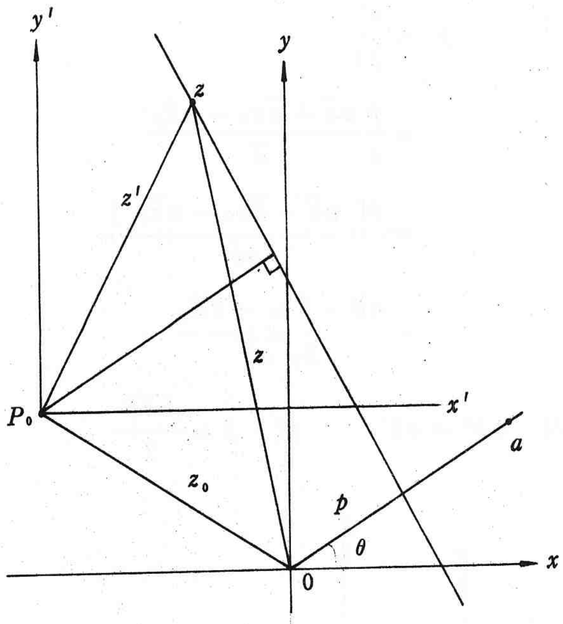

圖1-8

$$\frac{z'}{a}+\frac{\bar{z}'}{\bar{a}}=1-\frac{z_0}{a}-\frac{\bar{z}_0}{\bar{a}}$$

$$=\frac{a\bar{a}-\bar{a}z_0-a\bar{z}_0}{a\bar{a}}$$

即 $$\frac{z'}{\frac{a\bar{a}-\bar{a}z_0-a\bar{z}_0}{\bar{a}}}+\frac{\bar{z}'}{\frac{a\bar{a}-\bar{a}z_0-a\bar{z}_0}{a}}=1$$

即 $$a'=\frac{a\bar{a}-\bar{a}z_0-a\bar{z}_0}{\bar{a}}\text{ ，}$$

$$\bar{a}'=\frac{a\bar{a}-\bar{a}z_0-a_0\bar{z}_0}{a}$$

故在新座標系中 P_0 至所與直線所作的垂線足爲 $\frac{1}{2}a'$ 。因此在原來的座標系中垂直的座標爲

$$z_0+\frac{1}{2}a'=z_0+\frac{1}{2}\,\frac{a\bar{a}-\bar{a}z_0-a\bar{z}_0}{\bar{a}}$$

$$=\frac{a}{2}\left(1+\frac{z_0}{a}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{a}}\right)$$

現在來求從一點至一直線之距離。首先假設所與直線不經過原點。考慮點 P_0 和原點在所與直線之同側的情形。設 $a=2pt$ ， $t=\cos\theta+i\sin\theta$ ，如果 P_0 至所與直線之距離爲 p' ，則 $a'=2p't$ 。因此，

$$p' = \frac{a'}{2t}$$
$$= \frac{p}{a}\,\frac{a\bar{a} - \bar{a}z_0 - a\bar{z}_0}{\bar{a}}$$
$$= \frac{p(\,a\bar{a} - \bar{a}z_0 - a\bar{z}_0\,)}{a\bar{a}}$$
$$= \frac{a\bar{a} - \bar{a}z_0 - a\bar{z}_0}{2\sqrt{a\bar{a}}}$$

因 $4p^2 = a\bar{a}$ 故 $p = \dfrac{\sqrt{a\bar{a}}}{2}$ 。

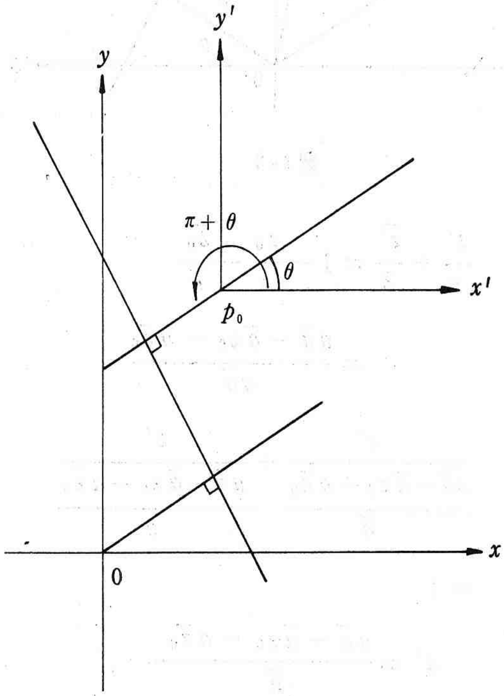

圖1-9

如果點 P_0 和原點在所與直線 g 之異側，如果 $a = 2pt$ ，則 $a' = -2p't$ ，因此

$$p' = -\frac{a'}{2t} = \frac{a\bar{z}_0 + \bar{a}z_0 - a\bar{a}}{2\sqrt{a\bar{a}}}$$

最後考慮所與直線經過原點的情形。此時所與直線可寫成下列形狀：

$$z - e^{2i\theta}\bar{z} = 0$$

因爲

$$z = z_0 + z'$$
$$(\,z_0 + z'\,) - e^{2i\theta}(\,\bar{z}_0 + \bar{z}'\,) = 0$$

故

$$z' - e^{2i\theta}\bar{z}' = -(\,z_0 - e^{2i\theta}\bar{z}_0\,)$$

即

$$\frac{z'}{-(\,z_0 - e^{2i\theta}\bar{z}_0\,)} + \frac{e^{2i\theta}}{z_0 - e^{2i\theta}\bar{z}_0}\,\bar{z}' = 1$$

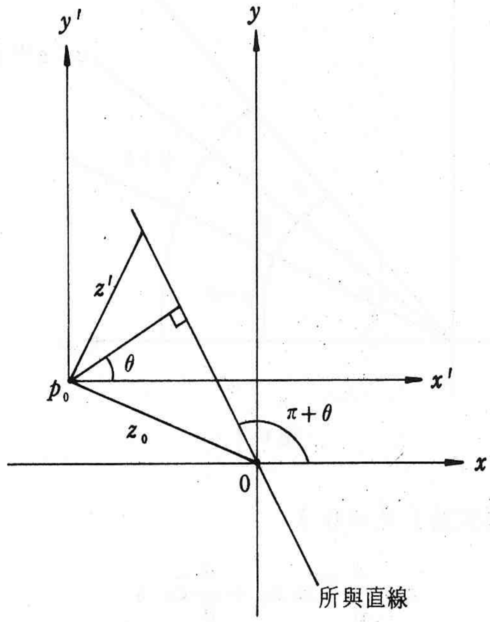

圖1-10

此爲所與直線關於新座標系的方程式。設從 P_0 至所與直線之距離爲 p' ，則 $a' = 2p't$ ，$t = \cos\theta + i\sin\theta$ 。故

$$a' = -(\,z_0 - e^{2i\theta}\bar{z}_0\,) = 2p't$$
$$a'\bar{a}' = 4p'^2 = (\,z_0 - e^{2i\theta}\bar{z}_0\,)(\,\bar{z}_0 - e^{-2i\theta}z_0\,)$$

因此

$$p' = \frac{\sqrt{a'\bar{a}'}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\,z_0 - e^{2i\theta}\bar{z}_0\,)(\,\bar{z}_0 - e^{-2i\theta}z_0\,)}$$

§1.5 三直線爲共點之條件

設三直線

$$\frac{z}{a} + \frac{\bar{z}}{\bar{a}} = 1\ ,\ \frac{z}{b} + \frac{\bar{z}}{\bar{b}} = 1 \text{ 和 } \frac{z}{c} + \frac{\bar{z}}{\bar{c}} = 1 \text{。}$$

如果此三直線交於點 z_0 ，則

$$\begin{cases} \dfrac{z_0}{a}+\dfrac{\overline{z_0}}{\overline{a}}-1=0 \\ \dfrac{z_0}{b}+\dfrac{\overline{z_0}}{\overline{b}}-1=0 \\ \dfrac{z_0}{c}+\dfrac{\overline{z_0}}{\overline{c}}-1=0 \end{cases}$$

成立。此時下列方程組：

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\eta}{\overline{a}}-\zeta=0 \\ \dfrac{\xi}{b}+\dfrac{\eta}{\overline{b}}-\zeta=0 \\ \dfrac{\xi}{c}+\dfrac{\eta}{\overline{c}}-\zeta=0 \end{cases}$$

有 $\xi=z_0$，$\eta=\overline{z_0}$，$\zeta=1$ 的解。因此其係數所成的行列式要等於零，即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{\overline{a}} & -1 \\ \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{\overline{b}} & -1 \\ \dfrac{1}{c} & \dfrac{1}{\overline{c}} & -1 \end{vmatrix}=0$$

必須成立。

反之，如果此關係成立，則此行列式之三列中有某一列可表成另外二列之線性組合。例如，第三列爲第一、第二兩列之組合，則有

$$\lambda\left(\frac{1}{a},\frac{1}{\overline{a}},-1\right)+\mu\left(\frac{1}{b},\frac{1}{\overline{b}},-1\right)$$

$$=\left(\frac{1}{c},\frac{1}{\overline{c}},-1\right)$$

之關係。從此式可得

$$\lambda\left(\frac{z}{a}+\frac{\overline{z}}{\overline{a}}-1\right)+\mu\left(\frac{z}{b}+\frac{\overline{z}}{\overline{b}}-1\right)$$

$$=\left(\frac{z}{c}+\frac{\overline{z}}{\overline{c}}-1\right)。$$

故得知：直線 $\dfrac{z}{c}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{c}}=1$ 經過二直線 $\dfrac{z}{a}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{a}}=1$ 和 $\dfrac{z}{b}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{b}}=1$ 之交點，即三直線爲共點。此處我們把平行的三直線視爲共點（即在無限遠點相交）。

所給三直線爲共點之條件亦可述之如下：即有不全爲零的三數 ℓ，m，n 存在使

$$\ell\left(\frac{z}{a}+\frac{\overline{z}}{\overline{a}}-1\right)+m\left(\frac{z}{b}+\frac{\overline{z}}{\overline{b}}-1\right)$$

$$+n\left(\frac{z}{c}+\frac{\overline{z}}{\overline{c}}-1\right)=0$$

恆等地成立。其理由如下：

因爲此式亦可寫成下列形狀：

$$\left(\frac{\ell}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c}\right)z+\left(\frac{\ell}{\overline{a}}+\frac{m}{\overline{b}}+\frac{n}{\overline{c}}\right)$$

$$-\left(\ell+m+n\right)=0$$

故此式恆等地成立之條件爲：有不全爲零之三數 ℓ，m，n 存在使

$$\begin{cases} \dfrac{\ell}{a}+\dfrac{m}{b}+\dfrac{n}{c}=0 \\ \dfrac{\ell}{\overline{a}}+\dfrac{m}{\overline{b}}+\dfrac{n}{\overline{c}}=0 \\ \ell+m+n=0 \end{cases}$$

成立。此條件爲

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{1}{\overline{a}} & \dfrac{1}{\overline{b}} & \dfrac{1}{\overline{c}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

成立之故。

本文作者許振榮為中央研究院數學研究所研究員，呂素齡為助理研究員。