一個多項式問題研究報導

楊重駿

多年前本人曾在〔3〕提出，稍近並在數播〔1〕及數學進展〔2〕上介紹了下面一個臆測及有關的討論：

臆測 1：設 $p(z)$、$q(z)$爲兩個同次的非常數多項式。若

$p(p-1)=0 \leftrightarrow q(q-1)=0$，則

$p\equiv q$ 或 $p+q\equiv 1$

兩者之一成立。

其中記號$\leftrightarrow$的意義是指不計重複度之下居$\leftrightarrow$兩邊方程的根的集是相同的。（譬如$(z-1)(z-3)^2=0\leftrightarrow(z-1)^3(z-3)=0$）。

這個問題曾引起不少數學家的興趣，但一直沒能得到什麼值得報導的結果。這方面最新研究結果是一篇筆者不久前收到由德國兩位教授（Dobbertin 及 Schmieder）合撰用來祝壽的文章〔4〕。（據D－S兩氏的附信中提及他們自上臆測提出後一直有興趣想把它解決）。

今該文雖然並沒能完全解答上面的臆測，但覺其方法及結果值得向數播的讀者作一稍加補充說明的介紹。

D－S兩氏的研究是從莫宗堅教授〔5〕對臆測 1 的研討及所作的標準化形式著手的；它爲具有下列形式及要求者：

臆測 2：設 p、q 爲兩 n 次非線性首一多項式（即 $p(z)=z^n+\cdots\cdots$，$q(z)=z^n+\cdots\cdots$；$n\geq 1$）及α、β爲複平面上任何兩非爲0的數。若 $p^2(z)-\alpha^2=0\leftrightarrow q^2(z)-\beta^2=0$，則$p\equiv q$。

注意：臆測 1 及 2 爲等價的。（讀者不妨作驗證！）

除非特別聲明以下出現的 $p(z)$ 及 $q(z)$ 及常數α、β都具有臆測 2 中的形式者。我們以M表 $p^2-\alpha^2=0$ 不同根（即不計重複度）的集合即

$$M=\{z\in c\mid p^2(z)-\alpha^2=0\}。$$

令 k 表爲 $p'(z)=0$ 的根，但不屬於M中者的數目（注意這兒要計算重複度）。於是$0\leq k\leq n-1$。又若 $p'=0$ 與 $p^2-\alpha^2=0$ 有一共同根 z_0。則 z_0 必爲 $p^2-\alpha^2=0$ 的一重根。$(n-1)-k$ 就是所有同時使 $p'=0$ 及 $p^2-\alpha^2=0$ 的根的數目，也即爲 $p^2-\alpha^2=0$ 重根的所有數目。而今 $p^2-\alpha^2=0$ 共有 $2n$（包括重複度）個根，所以 $p^2-\alpha^2=0$ 不同根的數目$=2n-[(n-1)-k]=n+k+1$ 就是M中的數目（用$|M|$表之）。於是

$$|M|=n+k+1 \quad \cdots\cdots(1)$$

在〔5〕的文章中，解決了當 $k=0$ 及 $k=n-2$ 的情形，但所用的論證是從某種多項式群的結構著手，至於 $k=n-1$ 它表示 $p^2-\alpha^2=0$ 的根皆爲單根，這時是很簡單的情形了。

D－S兩氏的主要結果爲

定理1：設p、q、α、β如臆測2中假設所述。設$p^2-\alpha^2=0 \leftrightarrow q^2-\beta^2=0$；即

$$M=\{z \in c \mid p^2(z)-\alpha^2=0\}$$
$$=\{z \in c \mid q^2(z)-\beta^2=0\}$$

注意 $|M|=n+k+1$

所以我們不妨設

$$M=\{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{n+k+1}\},$$

z_i等為不同的複數。今設$k \geq 1$，及有理函數

$$X(z)=\frac{p(z)-\alpha}{p(z)+\alpha}=\prod_{j=1}^{n+k+1}(z-z_j)^{t_j} \cdots (2)$$

$$Y(z)=\frac{q(z)-\beta}{q(z)-\beta}=\prod_{j=1}^{n+k+1}(z-z_j)^{s_j} \cdots (3)$$

其中s_i及t_j皆為非零整數。則至多有k個j使得比值$\frac{s_i}{t_j}$相等。

證：設$\{c_1, c_2, \cdots\cdots, c_k\}$及$\{d_1, d_2, \cdots\cdots, d_k\}$分別為所有$p'=0$及$q'=0$之根，但不屬$M$的集合（注意：兩集元素數目相等。何故？）。令$m=n+k+1$則立即可得

$$\frac{p'}{p^2-\alpha^2}=n\frac{(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_k)}{(z-z_1)\cdots\cdots\cdots\cdots(z-z_m)} \cdots (4)$$

$$\frac{q'}{q^2-\beta^2}=n\frac{(z-d_1)\cdots\cdots\cdots(z-d_k)}{(z-z_1)\cdots\cdots\cdots(z-z_m)} \cdots\cdots (5)$$

今由式(2)

$$\frac{p-\alpha}{p+\alpha}=X \quad \text{可得} \quad p=\alpha\frac{1+X}{1-X}$$

$$\text{因而} \quad p'=\frac{2\alpha X'}{(1-X)^2}$$

由此上可得

$$\frac{p'}{p^2-\alpha^2}=\frac{X'}{2\alpha X} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

同理可得

$$\frac{q'}{q^2-\beta^2}=\frac{Y'}{2\beta Y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

結合式(4)、(5)、(6)、(7)諸式，可得

$$(z-c_1)(z-c_2)\cdots\cdots(z-c_k)\frac{Y'}{\beta Y}$$
$$=(z-d_1)(z-d_2)\cdots\cdots(z-d_k)\frac{X'}{\alpha X}$$

或

$$\alpha(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_k)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{t_j}{z-z_j}\right)$$
$$=\beta(z-d_1)(z-d_2)\cdots\cdots(z-d_k)$$
$$\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{s_j}{z-z_j}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

由於z_j等為各異之數，所以對每一個j（$=1, 2, \cdots\cdots, m$）由比較兩邊首項係數可得

$$t_j \cdot \alpha \prod_{l=1}^{k}(z_j-c_l)$$
$$=s_j \cdot \beta \prod_{l=1}^{k}(z_j-d_l) \cdots\cdots\cdots (9)$$

於是每一個z_j為多項式

$$q_j(z)=\left\{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{s_j}{t_j}\right)\prod_{l=1}^{k}(z-d_l)\right\}$$
$$-\prod_{l=1}^{k}(z-c_l) \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

的一個根。不難看出除非$p \equiv q$，否則對任一個j，$q_j \not\equiv 0$（我們也可由下面定理2中得到此一觀察）。而q_j的次數$\leq k$，因此每個q_j至多有k個不同的根。而現在如有多於k個j值l_1, l_2, l_h（$h \geq k+1$）使得

$$\frac{t_{l_1}}{s_{l_1}}=\frac{t_{l_2}}{s_{l_2}}=\cdots\cdots\cdots=\frac{t_{l_h}}{s_{l_h}} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

則我們將有

$$q_{l_1}(z) \equiv q_{l_2}(z) \equiv \cdots\cdots \equiv q_{l_h}(z)$$

今取$q_{l_1}(z)$其在$z=z_{l_1}, z_{l_2}, \cdots\cdots, z_{l_h}$（$1 \leq l_1, \cdots\cdots, l_h \leq m$；$h \geq k+1$）時，由式(9)、(10)及(11)可知

$$q_{l_1}(z_{l_i})=0, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, h \text{。}$$

由此將導至$q_{l_1}(z) \equiv 0$之結論，得一矛盾。定理1由是得證。

當$k=0$時可證明臆測2成立的。

定理2：設p、q、α、β及M如同定理1中所定。今設$k=0$（即$|M|=n+1$），則

$p \equiv q$ 。

證：由 $k=0$ 之假設，可知 p' 與 q' 的根皆爲 $p^2-\alpha^2$ 或 $q^2-\beta^2$ 的根。

即
$$p-\alpha=\Pi(z-a_i)^{s_i},$$
$$p+\alpha=\Pi(z-b_j)^{t_j},$$
$$p'(z)=n\Pi(z-a_i)^{s_i-1}\cdot\Pi(z-b_j)^{t_j-1}。$$

於是
$$\frac{p'}{p^2-\alpha^2}=\frac{n}{\Pi(z-a_i)\Pi(z-b_j)}$$

同理可得
$$\frac{q'}{q^2-\beta^2}=\frac{n}{\Pi(z-a_i)\Pi(z-b_j)}$$

於是
$$\frac{p'}{p^2-\alpha^2}=\frac{q'}{q^2-\beta^2}$$

因而
$$\frac{1}{2\alpha}(\log\frac{p-\alpha}{p+\alpha})'=\frac{1}{2\beta}(\log\frac{q-\beta}{q+\beta})'$$

經積分可得
$$\frac{p-\alpha}{p+\alpha}=(\frac{q-\beta}{q+\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot d$$

d 爲一特定的常數。

由
$$\lim_{z\to\infty}\frac{p-\alpha}{p+\alpha}=1=\lim_{z\to\infty}\frac{q-\beta}{q+\beta}$$

可得 $d=1$ 。

現 $(p-\alpha)$ 與 $(p+\alpha)$ 及 $(q-\beta)$ 與 $(q+\beta)$ 皆爲互質，而 p 、q 又爲同次，所以 $\frac{\alpha}{\beta}$ 只能爲 ±1 。從而 $\beta p=\alpha q$ 或 $-\alpha q=\beta p$ 。由於 p 、q 爲單一多項式，所以只可能 $p\equiv q$ 。

定理３：設 p 、q 、M 及 α 、β 如定理 1 中所定；$|M|=n+k+1$ 。則 $2\leq k\leq\frac{(n+4)}{13}$ 或 $k=n-2$ 時，可得 $p\equiv q$ 。

（註：$k\geq2$ 此條件是筆者加的。它似乎是有必要的）

證：今所有 $p+\alpha$ 、$p-\alpha$ 、$q+\beta$ 及 $q-\beta$ 的根的總數（重複度在內）爲
$$4n=\sum_{j=1}^{n+k+1}(|s_j|+|t_j|) \qquad (12)$$

（注意：這是一個關於 n 、k 的等式）

現對任一對 (s_j,t_j)，相應有值 $|s_j|+|t_j|$ 。在所有的 $(|s_j|,|t_j|)$ $(j=1,2,\cdots\cdots,n+k+1)$ 中，取 $\frac{|s_j|}{|t_j|}$ 不同比值及按 $|s_j|+|t_j|$ 由小到大可得 $(1,1)$，$(2,1)$，$(1,2)$，$(3,1)$，$(1,3)$，$(4,1)$，$(3,2)$，$(2,3)$，$(1,4)$ 等等。注意在 $(|s_j|,|t_j|)\equiv(1,1)$ 中包括了 $(s_j,t_j)=\pm(1,1)$ 及 $(s_j,t_j)=\pm(-1,1)$ 4 種情形。但相應 (s_j,t_j) 爲 $\pm(1,1)$ 及 $\pm(-1,1)$ 者照定理 1 至多各有 k 對（即比例爲 $\frac{1}{1}$ $(=\frac{-1}{-1})$ 至多有 k 個如此的對，如 $(2,2)$，$(3,3)$，……等）。今如 $n+k+1=14k-3$（即 $n=13k-4$），而 $14k-3$ 可表爲 $2k+2k+2k+2k+2k+2k+2k-3$ 等 7 項之和。故如在式(12)右邊我們取 $|s_j|+|t_j|$ 值爲較小的前 7 種情形；即取 $2k$ 項 $|s_j|+|t_j|=2$ ，$2k$ 項 $|s_i|+|t_i|=3$ ，………，……，$(2k-3)$ 項 $|s_i|+|t_i|=5$ ，右邊的值只可能變小，於是一般我們有不等式
$$(52k-16=)\,4n\geq2k(2+2\cdot3+2\cdot4+5)+(2k-3)\cdot5$$
$$=52k-15$$

此不可能。接著我們要證當 k 固定只要 $n>13k-4$ 時式(12)不可能成立，除非 $p\equiv q$ 。上面不等式告訴我們當 $p\not\equiv q$ 及 n 達到 $13k-4$ 時，在式(12)右邊的和中，非得取 $2k$ 個 (s_i,t_i)；$|s_i|+|t_i|=2$ 及 $2k$ 個 (s_i,t_i)；$|s_i|+|t_i|=3$ ，$2k$ 個項 (s_i,t_i)；$|s_i|+|t_i|=4$ 不可，否則式(12)右邊 $n+k+1$ 項之和總會大於左邊項 $(4n)$ 。現如 k 爲固定的而

讓 n 繼續變動。當 n 超過 $13k-4$ 時，n 每增加 1（即 $n\to n+1$），式(12)的左邊 $4(n+1)=4n+4$ 增加 4，但右邊式的項數由 $n+k+1$ 項增加為 $n+k+1+1$ 項。而此新添的一項 (s_i, t_i) 必定在 $|s_j|+|t_j|\le 4$ 之項 (s_j, t_j) 之處（因這種項早在 $n=13k-4$ 時就得取光了）。所以此新添項 (s_i, t_i) 之和 $=|s_i|+|t_i|\ge 5$，即右邊每當 n 加 1，增加的值至少為 5。這表明式(12)不可能成立，只得 $p\equiv q$ 了。

今若 $k=n-2$ 及 $p\not\equiv q$，則

$$n+k+1=2k+3$$

於是式(12)右邊最小值為

$$2k\cdot 2+3\cdot 3=4k+9$$

但式(12)左邊 $=4n=4(k+2)=4k+8$，故式(12)不可能成立。故只有 $p\equiv q$。

當 $k=n-2$ 時在〔4〕中並舉了一個不同的證法，是直接由方程式未推論的。

輔理 1　設 p、q 為兩多項式，及 a、b、α、$\beta\in C$。今若

$$\frac{p^2-\alpha^2}{q^2-\beta^2}=\frac{z-a}{z-b}\quad 則\quad a=b$$

$$(即\ p^2-\alpha^2\equiv q^2-\beta^2)$$

證：首先不難得知 p 與 q 必為同次的，且不妨設 $\deg p=\deg q\ge 1$。及假設 p、q 是次數為最小的多項式，其等使得在 $a\neq b$ 之下及任意的 α、β

$$\begin{aligned}&(p-\alpha)(p+\alpha)(z-b)\\&=(q-\beta)(q+\beta)(z-a)\end{aligned}\tag{13}$$

成立。

令 $\quad p_0=\dfrac{p-\alpha}{z-a}$ 及 $q_0=\dfrac{q-\beta}{z-b}$

可假設 p_0 及 q_0 皆為多項式且滿足 $\deg p_0<\deg p$ 及 $\deg q_0<\deg q$，則式(13)變成為

$$\begin{aligned}&p_0((z-a)p_0+2\alpha)\\&=q_0((z-b)q_0+2\beta)\end{aligned}\tag{14}$$

令 g 表 p_0 與 q_0 的最大公因子及 $\tilde{p}=\dfrac{p_0}{g}$，$\tilde{q}=\dfrac{q_0}{g}$ 於是上式變成

$$\begin{aligned}&\tilde{p}(g\cdot(z-a)\tilde{p}+2\alpha)\\&=\tilde{q}(g\cdot(z-b)\tilde{q}+2\beta)\end{aligned}\tag{15}$$

由於 $\tilde{p}$ 與 $\tilde{q}$ 無公共因子，故由上式可得知必存在一多項式 u 使得

$$g\cdot(z-b)\tilde{q}+2\beta=\tilde{p}u \tag{16}$$

將上式代入式(15)得

$$g\cdot(z-a)\tilde{p}+2\alpha=\tilde{q}u \tag{17}$$

式(16)及(17)消去 2α 及 2β 得

$$\begin{aligned}&\tilde{p}(\alpha u+\beta g\cdot(z-a))\\&=\tilde{q}(\beta u+\alpha g\cdot(z-b))\end{aligned}\tag{18}$$

但 $\tilde{p}$ 與 $\tilde{q}$ 互質，所以同理由上式得找到一多項 h 使得

$$\alpha u+\beta g\cdot(z-a)=h\tilde{q} \tag{19}$$

及

$$\beta u+\alpha g\cdot(z-b)=h\tilde{p} \tag{20}$$

由式(19)及(18)解 g 及 u 得

$$g=\frac{1}{L}h(\beta\tilde{q}-\alpha\tilde{p}) \tag{21}$$

$$u=\frac{1}{L}h(\beta\cdot(z-a)\tilde{p}-\alpha\cdot(z-b)\tilde{q}) \tag{22}$$

其中

$$L=\beta^2\cdot(z-a)-\alpha^2\cdot(z-b) \tag{23}$$

由式(23)、(22)、(21)及(16)可得

$$\begin{aligned}&\tilde{p}h(\beta\cdot(z-a)\tilde{p}-\alpha\cdot(z-b)\tilde{q})\\&=\tilde{q}h(\beta\tilde{q}-\alpha\tilde{p})\cdot(z-b)+2\beta L\end{aligned}$$

整理後可得

$$\begin{aligned}&\beta h(\tilde{p}^2\cdot(z-a)-\tilde{q}^2(z-b))\\&=2\beta L\end{aligned}\tag{24}$$

同法可得

$$\begin{aligned}&\alpha h(\tilde{p}^2(z-a)-\tilde{q}^2(z-b))\\&=2\alpha L\end{aligned}\tag{25}$$

今 α、β 不同為 0，所以由式(24)或(25)可得

$$h(\tilde{p}^2\cdot(z-a)-\tilde{q}^2\cdot(z-b))=2L \tag{26}$$

今 L 至多為一多項式，所以我們分二種情形來討論：

(i)　$\dfrac{2}{h}=d$　為一常數

由此及式(23)，則式(26)可重表為與式(13)等價的方程式：

$$\frac{\widetilde{q}^2-d\alpha^2}{\widetilde{p}^2-d\beta^2}=\frac{z-a}{z-b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

現 $\deg\widetilde{p}\leq\deg p_0<\deg p$ 及 $\deg\widetilde{q}\leq\deg q_0<\deg q$ 。

此與 p、q 為具最少次數的多項式使得式如(13)式成立的假設矛盾。

(ii) $\frac{2L}{h}=d$ 為一常數，則我們有

$$(z-a)\cdot\widetilde{p}^2-(z-b)\widetilde{q}^2=d$$

令常數 r 使其滿足

$$r^2\cdot(z-a)-r^2\cdot(z-b)=d$$

則由上面兩式立即可得

$$\frac{\widetilde{q}^2-r^2}{\widetilde{p}^2-r^2}=\frac{z-a}{z-b}$$

此又回到前面 (i) 的情形。所以無論如何 $a=b$ 才行。

現我們敍述及證明 $k=n-2$ 的結果如下:

定理4：設 p、q 為同次非常數的單一多項式（即最高項係數為1者）。α、β 為兩非0的複數。若 $\{z\in C\,|\,p^2(z)-\alpha^2=0\}=\{z\in C\,|\,q^2(z)-\beta^2=0\}=M$ 且 $|M|=2n-1$（即 $k=n-2$），則臆測2成立。

證：現只有兩種情形待討論

(i) $p^2-\alpha^2=q^2-\beta^2$

(ii) $p^2-\alpha^2=(z-a)^2(z-b)R$

及 $q^2-\beta^2=(z-b)^2(z-a)R$；$R$ 為同屬於 $p^2-\alpha^2$ 及 $q^2-\beta^2$ 的其它（單重）根的乘積。

當 (i) 成立時，它表示 $(p+q)(p-q)=\alpha^2-\beta^2$，由於 p、q 皆為首一多項式，我們只可能下 $p\equiv q$ 之結論。

當 (ii) 成立時，由上面的輔理我們仍可得 $p\equiv q$ 之結論。

註：此亦為莫宗堅教授在〔5〕中得的一個結果。

結論：今如 p、q 為兩 n（>0）次的多項式，滿足

$$S=\{z\,|\,p(z)(p(z)-1)=0\}$$
$$=\{z\,|\,q(z)(q(z)-1)=0\};$$
$$|S|=n+k+1。$$

則對每個結定的 k，相應有一函數 $n(k)$，只要 $n>n(k)$ 則我們就可得 $p\equiv q$ 或 $p+q\equiv 1$ 的結論。S－D兩氏找出了 $n(k)$ 的一種形式：$n(k)=13k-4$。

文〔4〕中的證明算是很初等的但却有很高度的技巧性。又據同文結尾的註中表示臆測2在 $n\leq 5$ 是成立的。有興趣的讀者不妨驗證一下。我們在此順便提出一個有關的研究問題：就是如何去建造兩個不同的 n 次單一多項式 p、q，及常數 α、β 使得集合 $M=\{z\in C\,|\,p^2(z)-\alpha^2=0\}$ 與 $N=\{z\in C\,|\,q^2(z)-\beta^2=0\}$ 的共同元素為一指定的數目？能解決此一問題，臆測2也就自然得到答案了。（也即臆測2不一定恆成立！）

最後要謝謝貴刊審核先生對本文的興趣，作了筆誤之更正及提供了一些寶貴的意見。

參考資料：

1. 楊重駿：“一些有關多項式的問題”。本刊第八卷第二期（73年）；43～47。
2. 楊重駿：“關於多項式及超越整函數的某些問題”。數學進展，第13卷第1期；1～3。
3. Chung-chun Yang, in *Complex Analysis*, *Proc. of the SUNY Brockport Conf.*, Dekker, Newyork-Basel 1978, p.169。
4. Hans Dobbertin and Gerald schmieder: *Zur Charakterisierung Von Polynomen Durch Ihre Null-UND Einsstellen*, preprint。
5. T.T. Moh（莫宗堅）: On a certain group structure of polynomials *Proc. Amer. Math. soc.* 82 (1981), 183～187。