Beta 變換

林建宏

一、引 言

給一如下形式的積分

$$\int_0^\infty \frac{f(x)dx}{(e^x-1)^s}$$

這裡 $s\in\mathbf{C}$。由Beta 函數定義

$$B(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du$$

$$Re\,p>0\ ,\ Re\,q>0$$

將積分變數作連續變換 $u=e^{-x}$ ，得

$$B(p,q)=\int_0^\infty e^{-px}(1-e^{-x})^{q-1}dx$$

令 $p=s+a$ ，$q=1-s$ ，則此式又可寫成

(1.1) $$B(s+a,1-s)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}dx}{(e^x-1)^s}$$

顯然，Beta 函數與我們欲求解之積分關係密切。今定義符號

$$\mathscr{B}[f(x)]\equiv\int_0^\infty \frac{f(x)dx}{(e^x-1)^s}$$

稱作 $f(x)$ 的Beta 變換。下節我們討論在 $0<Re\,s<T$ 的情況下，什麼樣的函數才有 Beta 變換存在，並證明此種變換具解析性。其次，求出許多基本函數的 Beta 變換，如 $\sin ax$ 、$\cos ax$ 、e^{-ax} 、x^n 及 x^ne^{-ax} 等等。另外，根據Sneddon 證明Mellin 逆變換的想法〔3 ; pp.272～275〕證出Beta 逆變換定理。最後，列出一些尚待發展及解決的問題。

二、Beta變換之基本定理

若$\mathbf{C}$表示所有複數的集合，G爲$\mathbf{C}$上的一個開子集，則由G映至$\mathbf{C}$所有連續函數的集合記爲$C(G,\mathbf{C})$。若$G=\bigcup_{n=1}^\infty K_n$ ，其中每個K_n 均爲緊緻且$K_n\subset \operatorname{int}K_{n+1}$ ，則對$C(G,\mathbf{C})$中所有函數f和g，定義距量(metric) ρ爲

(2.1) $$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$$

此處

$$\rho_n(f,g)=\sup\{d(f(s),g(s)):s\in K_n\}$$

底下引理之證明請參閱〔1 ; p.144〕

引理2.1 令距量ρ如(2.1)所定義。若給定$\varepsilon>0$，存在一個$\delta>0$及一個緊緻集$K\subset G$，使得對所有f，$g\in C(G,\mathbf{C})$滿足

$$\sup\{d(f(s),g(s)):s\in K\}<\delta\Rightarrow\rho(f,g)<\varepsilon$$

反過來說，若給定 $\delta > 0$ 及一個緊緻集 K，存在一個 $\varepsilon > 0$，使得對所有 f，$g \in C(G, \mathbf{C})$ 滿足

$$\rho(f, g) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \sup\{d(f(s), g(s)) : s \in K\} < \delta$$

令 $\mathrm{Hol}(G)$ 表示 G 上的解析函數組（ collection of analytic functions ），顯然，$\mathrm{Hol}(G)$ 可視爲 $C(G, \mathbf{C})$ 的一個子集。由於 $C(G, \mathbf{C})$ 是一個完備距量空間（ complete metric space ），由解析函數列之極限仍爲解析得

引理 2.2：$\mathrm{Hol}(G)$ 是一個完備距量空間。

請參閱〔 1 ; p.151 〕。接著，我們列出底下引理，證明可在〔 1 ; p.69 〕找到。

引理 2.3：令 G 是一個開集合，γ 爲 G 中的一條可度量曲線（ rectifiable curve ）。設 $h : \{\gamma\} \times G \to \mathbf{C}$ 是一個連續函數，定義 $g : G \to \mathbf{C}$ 爲

$$g(s) = \int_\gamma h(x, s)\, dx$$

則 g 是連續的。若 $h(x, s)$ 對 s 言是解析的，則 g 爲解析函數，且

$$g'(s) = \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial s}(x, s)\, dx$$

引理 2.4：令 $I = \{s : l \le \mathrm{Re}\, s \le L\}$，其中 $0 < l < L < T$。若函數 $f(x)$ 滿足下列三個條件：

(1) $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上爲連續函數。

(2) $|f(x)| \le M_1 x^{T-1}$，$x \in (0, 1)$。

(3) $|f(x)| \le M_2 e^{l_0 x}$，$x \in [1, \infty)$。

此處 M_1，M_2，l_0 均爲正常數且 $0 < l_0 < l$，則

(a)對每個 $\varepsilon > 0$，有一數 δ，$0 < \delta < 1$，使得

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)(e^x - 1)^{-s}\, dx \right| < \varepsilon,$$
$$\forall s \in I$$

恆成立，當 $0 < \alpha < \beta < \delta$。

(b)對每個 $\varepsilon > 0$，有一數 $\nu > 1$，使得

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)(e^x - 1)^{-s}\, dx \right| < \varepsilon,$$
$$\forall s \in I$$

恆成立，當 $\beta > \alpha > \nu$。

證明：(a)設 $x \in (0, 1)$ 且 s 在 I 中。因

$$|(e^x - 1)^{-s}| \le x^{-\mathrm{Re}\, s} \le x^{-L}$$

故由條件(2)知

$$|f(x)(e^x - 1)^{-s}| \le M_1 x^{T-L-1},$$
$$\forall x \in (0, 1)$$

利用此不等式，若 $0 < \alpha < \beta < 1$，則

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)(e^x - 1)^{-s}\, dx \right|$$
$$\le M_1 \int_\alpha^\beta x^{T-L-1}\, dx$$
$$= \frac{M_1}{T-L}(\beta^{T-L} - \alpha^{T-L}),$$
$$\forall s \in I$$

由於 M_1 爲正常數且 $T - L > 0$，故若給定 $\varepsilon > 0$，則我們可取 δ，$0 < \delta < 1$，使得

$$\left| \frac{M_1}{T-L}(\beta^{T-L} - \alpha^{T-L}) \right| < \varepsilon$$

當 $0 < \alpha < \beta < \delta$。此即證明了(a)部分。

(b)設 $x \in [1, \infty)$ 且 s 在 I 中。因

$$|(1 - e^{-x})^{-s}| \le (1 - e^{-x})^{-L}$$

且 $(1 - e^{-x})^{-L}$ 在 $[1, \infty)$ 上爲 x 的有界函數，故有一正常數 c，使得

$$|(1 - e^{-x})^{-s}| \le c, \quad x \in [1, \infty) \tag{2.2}$$

由條件(1)知 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上連續，因此，$f(x)e^{-lx}$ 在 $[1, \infty)$ 上亦連續。再由條件(3)得

$$|f(x)e^{-sx}| \le |f(x)|e^{-lx} \tag{2.3}$$

$$\leq M_2 e^{-(l-l_0)x}\ ,\ x\in[1,\infty)$$

顯然，由(2.2)及(2.3)兩式易知

$$|f(x)(e^x-1)^{-s}|$$

$$\leq cM_2 e^{-(l-l_0)x}\ ,\ x\in[1,\infty)$$

應用此不等式，若 $\beta>\alpha>\nu$，則

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)(e^x-1)^{-s}\,dx\right|$$

$$\leq cM_2\int_\alpha^\beta e^{-(l-l_0)x}\,dx$$

$$=\frac{cM_2}{l-l_0}\left[e^{-(l-l_0)\alpha}-e^{-(l-l_0)\beta}\right],$$

$$\forall s\in I$$

因 c，M_2，l_0 均為正常數且 $l-l_0>0$，故對任意給定的 $\varepsilon>0$，有一數 $\nu>1$，使得

$$\left|\frac{cM_2}{l-l_0}\left[e^{-(l-l_0)\alpha}-e^{-(l-l_0)\beta}\right]\right|<\varepsilon$$

當 $\beta>\alpha>\nu$，於是(b)部分已得證明。因此引理完全得證。

性質 2.5：假設集合 $G=\{s:0<\text{Re}\,s<T\}$，且

$$F_n(s)=\int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)(e^x-1)^{-s}\,dx\ ,\ \forall s\in G$$

此處 $n\geq 1$。若 $f(x)$ 滿足引理 2.4 之三條件，則在 G 上的每個 F_n 均具解析性，且 $\{F_n\}$ 在 $\text{Hol}(G)$ 中收斂。

證明：令 $h(x,s)=f(x)(e^x-1)^{-s}$。由於 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上連續，因此 $h(x,s)$ 為 $[\frac{1}{n},n]\times G$ 上的一個連續函數。微分 $h(x,s)$ 得

$$\frac{\partial h}{\partial s}=-f(x)(e^x-1)^{-s}\log(e^x-1)$$

顯而易見，在 $[\frac{1}{n},n]\times G$ 中，$h(x,s)$ 對 s 言為解析，由引理 2.3 知 F_n 為解析。

若 K 為緊緻且 $K\subset G$，則存在正實數 l 和 L，$0<l<L<T$，使得 $K\subset\{s:l\leq\text{Re}\,s\leq L\}$。由於 $f(x)$ 滿足引理 2.4 的三條件，故若 $m>n$，由引理 2.4 知

$$|F_m(s)-F_n(s)|$$

$$=\left|\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} f(x)(e^x-1)^{-s}\,dx\right|$$

$$+\left|\int_n^m f(x)(e^x-1)^{-s}\,dx\right|\leq\varepsilon$$

再由引理 2.1 易知 $\{F_n\}$ 是 $\text{Hol}(G)$ 中的一個 Cauchy 數列。然又因引理 2.2 已明確指出 $\text{Hol}(G)$ 是完備的，故 $\{F_n\}$ 必收斂。明所欲證。

若令 $\{F_n\}$ 之極限為 F，則性質 2.5 即已證明了如下定理

定理2.6 令 $G=\{s:0<\text{Re}\,s<T\}$。若 $f(x)$ 滿足引理 2.4 之三條件，$0<l<L<T$，且 $s\in G$，則 $F(s)=\mathscr{B}[f(x)]$ 存在，且 $F(s)$ 為 s 的解析函數。

三、幾個基本函數的Beta變換

考慮函數

$$f(x)=e^{-xz}\ ,\ z\in D$$

此處 $D=\{z:\text{Re}\,z>0\}$。顯然，對 $(0,\infty)\times D$ 中的每個 (x,z) 言，$f(x)$ 都是連續的。接著，我們求出 $\text{Re}\,s$ 的範圍如下：

(a)若 $x\in(0,1)$，則 $|f(x)|\leq e^{-x\text{Re}\,z}\leq M_1$。由引理 2.4 之條件(2)可取 $T=1$。

(b)若 $x\in[1,\infty)$，則 $|f(x)|\leq e^{-x\text{Re}\,z}\leq M_2 e^{l_0 x}$。由引理 2.4 之條件(3)知 $l_0>0$ 即足。

由以上討論得知，若 $0<\text{Re}\,s<1$，則 e^{-xz} 滿足引理 2.4 之三條件。為此，我們令 $G_1=\{s:0<\text{Re}\,s<1\}$。若 $(s,z)\in G_1\times D$，則由定理 2.6 知 $\mathscr{B}[e^{-xz}]$ 存在，應用(1.1)式得

(3.1) $\mathscr{B}[e^{-xz}]=B(s+z,1-s)$

因對 $[\delta,\infty)\times G_1\times D(\delta>0)$ 中每個 (x,s,z) 言，$e^{-xz}(e^x-1)^{-s}$ 均為有界連續，故我們可對 (3.1) 式取極限 $z\to 0$。由公式

$$(3.2)\qquad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},\quad s\in G_1$$

以及

$$(3.3)\qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad \mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0$$

很容易得出

$$(3.4)\qquad \mathscr{B}[1]=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

其中 $s\in G_1$。若令 $z\to ia$，a 為實數且 $0<|a|<\infty$，則由 (3.1) 式易得

$$(3.5)\qquad \mathscr{B}[e^{-iax}]=B(s+ia,1-s)$$

這裡 $s\in G_1$。下面我們證明

性質 3.1 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$ 均為實常數，且 $f_1,f_2,\cdots\cdots,f_n$ 均滿足引理 2.4 之三條件，則

$$\mathscr{B}\Big[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j\Big]=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathscr{B}[f_j]$$

由於 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$ 均為實常數，且 $f_1,f_2,\cdots\cdots,f_n$ 均滿足引理 2.4 之三條件，因此下列式子成立

$$\mathscr{B}[\lambda_j f_j]=\lambda_j\mathscr{B}[f_j],\ 1\le j\le n$$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}f_j(x)\Big|\le\sum_{j=1}^{n}|f_j(x)|\le\sum_{j=1}^{n}\begin{cases}M'_j x^{T_j-1}, & \text{若 } x\in(0,1)\\ M''_j e^{l_j x}, & \text{若 } x\in[1,\infty)\end{cases}$$

今取 $M_1=n\cdot\max\{M'_j\}$，$M_2=n\cdot\max\{M''_j\}$，$T=\min\{T_j\}$，$l_0=\max\{l_j\}$，故前面第二個不等式可化成

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}f_j(x)\Big|\le\begin{cases}M_1x^{T-1}, & \text{若 } x\in(0,1)\\ M_2e^{l_0x}, & \text{若 } x\in[1,\infty)\end{cases}$$

顯然，$\sum_{j=1}^{n}f_j$ 亦滿足引理 2.4 之三條件，因此，$\mathscr{B}[\sum_{j=1}^{n}f_j]$ 存在。由以上討論結果，我們知

$$\mathscr{B}\Big[\sum_{j=1}^{n}\lambda_jf_j\Big]=\sum_{j=1}^{n}\mathscr{B}[\lambda_jf_j]=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathscr{B}[f_j]$$

得所欲證。

利用性質 3.1，我們可求出 $\cos ax$ 和 $\sin ax$ 的 Beta 變換。茲列出 Euler 公式如下

$$\cos ax=\frac{1}{2}(e^{iax}+e^{-iax})$$

$$\sin ax=\frac{1}{2i}(e^{iax}-e^{-iax})$$

對這兩個恆等式取 Beta 變換，並利用 (3.5) 式及性質 3.1，則很容易求出

$$(3.6)\qquad \mathscr{B}[\cos ax]=\frac{1}{2}[B(s-ia,1-s)+B(s+ia,1-s)]$$

$$(3.7)\qquad \mathscr{B}[\sin ax]=\frac{1}{2i}[B(s-ia,1-s)-B(s+ia,1-s)]$$

其中 $s\in G_1$，a 為實數且 $0<|a|<\infty$。在此且讓我們證明 Riemann-Lebesgue 引理

定理 3.2：若 $s\in G_1$，則

$$(3.8)\qquad \lim_{a\to\infty}\int_0^\infty\frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}=\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty\frac{\sin ax\,dx}{(e^x-1)^s}=0$$

證明：由於 $\cos ax$ 滿足引理 2.4 之三條件，故若給定 $\varepsilon>0$，則有

$$(3.9)\qquad \left|\int_\xi^\alpha \frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}\right|\le\frac{\varepsilon}{3},\quad 0<\xi<\alpha<1$$

以及

$$(3.10)\qquad \left|\int_\beta^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}\right|\le\frac{\varepsilon}{3},\quad \beta>1$$

其中 $s\in G_1$。應用分部積分法易得

$$\int_\alpha^\beta \frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}=\frac{\sin a\beta}{a(e^\beta-1)^s}-\frac{\sin a\alpha}{a(e^\alpha-1)^s}+\frac{s}{a}\int_\alpha^\beta\frac{e^x\sin ax\,dx}{(e^x-1)^{s+1}}$$

顯而易見，必有充分大的 a，足夠使

$$(3.11)\qquad \left|\int_\alpha^\beta \frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}\right|\le\frac{\varepsilon}{3},\quad 0<\alpha<1<\beta$$

由 (3.9)，(3.10) 及 (3.11) 三個不等式，可得到

$$\left|\int_\xi^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}\right|\le\varepsilon,\quad a\text{ 充分大},\ \forall s\in G_1$$

由於 ε 及 ξ 均可任意，因此，我們證明了

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(e^x-1)^s}=0,\quad \forall s\in G_1$$

同理可得

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{(e^x-1)^s}=0,\quad \forall s\in G_1$$

證明終了。

有了 (3.8) 這個結果，我們就有底下定理

定理3.3：若 $s\in G_1$，則

$$\lim_{|a|\to\infty}\frac{\Gamma(s+ia)}{\Gamma(1+ia)}=0$$

由定理 3.2 及 (3.6) 式易知，若 $s\in G_1$，則

$$\lim_{a\to\infty}[B(s-ia,1-s)+B(s+ia,1-s)]=0$$

今將 (3.7) 式寫成

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{(e^x-1)^s}=\frac{1}{2i}[B(s-ia,1-s)+B(s\,ia,1-s)]+iB(s+ia,1-s)$$

應用前面極限式以及定理 3.2，令此式之 $a\to\infty$，則可求出

$$\lim_{a\to\infty}B(s+ia,1-s)=0$$

由定理 3.2 及 (3.7) 式，同理可得

$$\lim_{a\to\infty}B(s-ia,1-s)=0$$

因爲 $0<|\Gamma(1-s)|<\infty$，$\forall s\in G_1$，故由 (3.3) 式，前述兩個極限式可寫成

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(s+ia)}{\Gamma(1+ia)}=\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(s-ia)}{\Gamma(1-ia)}=0$$

定理已明。

繼續前面的工作，令 (3.1) 式的 z 分別等於 $\beta+ia$，$\beta-ia$（β 與 a 均爲實數且 $\beta>0$），易知

$$(3.12)\qquad \mathscr{B}[e^{-(\beta+ia)x}]=B(s+\beta+ia,1-s)$$

$$(3.13)\qquad \mathscr{B}[e^{-(\beta-ia)x}]=B(s+\beta-ia,1-s)$$

再次利用 Euler 公式及性質 3.1，若 $s\in G_1$，β 與 a 均爲實數且 $\beta>0$，則 (3.12) 及 (3.13) 兩式不難算出

$$(3.14)\qquad \mathscr{B}[e^{-\beta x}\cos ax]=\frac{1}{2}[B(s+\beta-ia,1-s)+B(s+\beta+ia,1-s)]$$

$$(3.15)\qquad \mathscr{B}[e^{-\beta x}\sin ax]=\frac{1}{2i}[B(s+\beta-ia,1-s)$$

$$-B(s+\beta+ia,1-s)]$$

在Gradshteyn和Ryzhik 合著的書〔2〕中，第481頁有以上兩個式子的等價結果，編號分別為3.912-1，3.912-2。為求解冪函數x^n($n\in Z^+$)之Beta 變換，先對(3.1)式取z之偏微分，得

$$(3.16)\quad \mathscr{B}[x^n e^{-xz}] = (-1)^n \frac{\partial^n B}{\partial z^n}(s+z,1-s)$$

其中$(s,z)\in G_1\times D$。應用(3.3)式，對$B(s+z,1-s)$取對數並微分得出

$$(3.17)\quad \frac{\partial B}{\partial z}(s+z,1-s) = B(s+z,1-s)\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(z+1)}$$

為簡潔起見，令

$$B_0 = B(s+z,1-s)$$

$$B_n = \frac{\partial^n B_0}{\partial z^n}$$

$$A_0 = \frac{\partial}{\partial z}\log\frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(z+1)}$$

$$A_n = \frac{\partial^n A_0}{\partial z^n}$$

由以上記號，(3.17)式即可表成

$$(3.18)\quad B_1 = B_0 A_0$$

經直接計算，可求得

$$(3.19)\quad B_2 = B_0(A_0^2 + A_1)$$

$$(3.20)\quad B_3 = B_0(A_0^3 + 3A_0A_1 + A_2)$$

$$(3.21)\quad B_4 = B_0(A_0^4 + 6A_0^2A_1 + 4A_0A_2 + 3A_1^2 + A_3)$$

$$(3.22)\quad B_5 = B_0(A_0^5 + 10A_0^3A_1 + 10A_0^2A_2 + 15A_0A_1^2 + 5A_0A_3 + 10A_1A_2 + A_4)$$

現將(3.16)式取極限$z\to 0$，給出

$$(3.23)\quad \mathscr{B}[x^n] = \lim_{z\to\infty}(-1)^n \frac{\partial^n B}{\partial z^n}(s+z,1-s)$$

定義函數$\varphi(s)$為

$$\varphi(s) = -\gamma - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)},\ \mathrm{Re}\, s > 0$$

其中γ為Euler 常數。由此定義及前述記號，已知$\varphi(1)=0$，顯而易見

$$\lim_{z\to 0} A_0 = -\varphi(s)$$

$$\lim_{z\to 0} A_n = \varphi^{(n)}(1) - \varphi^{(n)}(s)$$

$$\lim_{z\to 0} B_0 = \frac{\pi}{\sin\pi s}$$

如定義

$$\Phi_n(s) = \left(\frac{\sin\pi s}{\pi}\right)\lim_{z\to 0}(-1)^n \cdot \frac{\partial^n B}{\partial z^n}(s+z,1-s)$$

則(3.23)式又可寫成

$$(3.24)\quad \mathscr{B}[x^n] = \frac{\pi}{\sin\pi s}\Phi_n(s)$$

利用前述三個極限式，易求出

$$(3.25)\quad \Phi_1(s) = \varphi(s)$$

$$(3.26)\quad \Phi_2(s) = \varphi^2(s) + \varphi'(1) - \varphi'(s)$$

$$(3.27)\quad \Phi_3(s) = \varphi^3(s) + 3\varphi(s)[\varphi'(1) - \varphi'(s)] - \varphi''(1) + \varphi''(s)$$

$$(3.28)\quad \Phi_4(s) = \varphi^4(s) + 6\varphi^2(s)[\varphi'(1) - \varphi'(s)] - 4\varphi(s)\cdot[\varphi''(1) - \varphi''(s)] + 3[\varphi'(1) - \varphi'(s)]^2 + \varphi'''(1) - \varphi'''(s)$$

$$(3.29)\quad \Phi_5(s) = \varphi^5(s) + 10\varphi^3(s)[\varphi'(1) - \varphi'(s)] - 10\varphi^2(s)\cdot[\varphi''(1) - \varphi''(s)] + 15\varphi(s)[\varphi'(1) - \varphi'(s)]^2 + 5\varphi(s)[\varphi'''(1) - \varphi'''(s)] - 10[\varphi'(1) - \varphi'(s)][\varphi''(1) - \varphi''(s)] - \varphi^{(4)}(1) + \varphi^{(4)}(s)$$

式子(3.25)之等價結果請參閱〔2；p.558

］公式 4.293-11，而(3.26)式的類似公式可在〔2；p.541〕找到，編號爲 4.261-17。

前面討論的 s 雖僅限 $s\in G_1$，事實上，若 $0<\operatorname{Re}s<m+1$，則 $\mathcal{B}[x^m]$ 亦存在（m 不須爲整數）。一般來說，祇要 $\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}s>0$，則積分 $\int_0^\infty x^{\nu-1}(e^x-1)^{-s}dx$ 存在。因

$$
\begin{aligned}
|x^{\nu-1}| &\le x^{\operatorname{Re}\nu-1}\\
&\le \begin{cases} M_1x^{T-1}, & \text{若 } x\in(0,1)\\ M_2e^{l_0x}, & \text{若 } x\in[1,\infty)\end{cases}
\end{aligned}
$$

顯然，若取 $T=\operatorname{Re}\nu$ 以及 $l_0>0$，則 $f(x)=x^{\nu-1}$ 滿足引理 2.4 之三條件，故 $\mathcal{B}[x^{\nu-1}]$ 存在。

假設 $\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}s>1$，由於

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}dx}{(e^x-1)^s}\\
&=\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^xdx}{(e^x-1)^s}-\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}dx}{(e^x-1)^{s-1}}\\
&=\frac{\nu-1}{s-1}\int_0^\infty \frac{x^{\nu-2}dx}{(e^x-1)^{s-1}}\\
&\quad-\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}dx}{(e^x-1)^{s-1}}
\end{aligned}
$$

故得

(3.30) $$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}[x^{\nu-1};s]\\
&=\frac{\nu-1}{s-1}\mathcal{B}[x^{\nu-2};s-1]\\
&\quad-\mathcal{B}[x^{\nu-1};s-1]
\end{aligned}
$$

定義

$$f^*(x)=\frac{f(x)}{(1-s)(e^x-1)^{s-1}}$$

如進一步考慮 $\mathcal{B}[f(x);s-1]$ 及 $\mathcal{B}[f'(x);s-1]$ 均存在，且 $f^*(\infty)$ 及 $f^*(0)$ 均爲有限值，則有

(3.31) $$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}[f(x);s]\\
&=\frac{1}{s-1}\mathcal{B}[f'(x);s-1]\\
&\quad-\mathcal{B}[f(x);s-1]\\
&\quad+f^*(\infty)-f^*(0)
\end{aligned}
$$

特例，當 $f^*(\infty)=f^*(0)=0$，我們有

(3.32) $$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}[f(x);s]\\
&=\frac{1}{s-1}\mathcal{B}[f'(x);s-1]\\
&\quad-\mathcal{B}[f(x);s-1]
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
&\omega_1(m,k;s)\\
&=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}[\log(e^x-1)]^k}{(e^x-1)^s}dx\\
&\omega_2(m,k;s)\\
&=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}[\log(1-e^{-x})]^k}{(e^x-1)^s}dx
\end{aligned}
$$

此處 m，k 均爲正整數且 $m>\operatorname{Re}s>0$。由引理 2.4 之三條件，不難判斷出

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}\{x^{m-1}[\log(e^x-1)]^k\},\\
&\mathcal{B}\{x^{m-1}[\log(1-e^{-x})]^k\}
\end{aligned}
$$

均存在。由於

$$
\begin{aligned}
&\log(e^x-1)\\
&=x+\log(1-e^{-x}),\ x\in(0,\infty)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\omega_1(m,k;s)\\
&=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k-j}[\log(1-e^{-x})]^j}{(e^x-1)^s}dx\\
&=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\int_0^\infty \frac{x^{m+k-j-1}[\log(1-e^{-x})]^j}{(e^x-1)^s}dx\\
&=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\omega_2(m+k-j,j;s)
\end{aligned}
$$

當然，我們也有

$$
\begin{aligned}
&\omega_2(m,k;s)\\
&=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}x^{k-j}[\log(e^x-1)]^j}{(e^x-1)^s}dx\\
&=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\int_0^\infty \frac{x^{m+k-j-1}[\log(e^x-1)]^j}{(e^x-1)^s}dx
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\omega_1(m+k-j\,,\,j\,;\,s)$$

如定義

$$Q(\nu\,,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(s)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+s)^{\nu}}$$

其中$\mathrm{Re}\nu>\mathrm{Re}s>0$且$h_n(s)=s(s+1)\cdots\cdots(s+n-1)$。$h_0(s)=1$，則

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\nu-1}dx}{(e^x-1)^s}$$

$$=\int_0^{\infty}x^{\nu-1}e^{-sx}(1-e^{-x})^{-s}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-s}{n}(-1)^n\int_0^{\infty}x^{\nu-1}e^{-(n+s)x}dx$$

$$=\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(s)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+s)^{\nu}}$$

$$=\Gamma(\nu)Q(\nu\,,s)$$

亦即

(3.33) $\mathscr{B}[x^{\nu-1}]=\Gamma(\nu)Q(\nu\,,s)$，$\mathrm{Re}\nu>\mathrm{Re}s>0$

定義$I_\varepsilon(\delta)=\{(\nu\,,s):\mathrm{Re}\nu-\mathrm{Re}s=\alpha\geq\delta\,,\ \varepsilon\leq|s|<1\}$，其中$\delta>0$，$\varepsilon>0$。我們現證明若$(\nu\,,s)\in I_\varepsilon(\delta)$，則$Q(\nu\,,s)$均勻收斂。令

$$K=\sqrt{2\pi}\ |[1+o(1)]|$$
$$K^*\leq 2$$

則由

$$\frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(s)}=h_n(s)$$

以及大家熟知的Stirling公式

$$\Gamma(s)=Ke^{-s}s^{s-\frac{1}{2}}\,,\ |s|\gg 1$$

易知

$$\left|\frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n+1)}\right|$$

$$\leq K^*e^{1-\mathrm{Re}s}\frac{|n+s|^{n-\frac{1}{2}+\mathrm{Re}s}}{|n+1|^{n+\frac{1}{2}}}\,,\ n\gg 1$$

由於$(\nu\,,s)\in I_\varepsilon(\delta)$，因此

$$\frac{|n+s|^{n-\frac{1}{2}-(\mathrm{Re}\nu-\mathrm{Re}s)}}{|n+1|^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\leq\frac{|n+1|^n\cdot n^{-\frac{1}{2}-\delta}}{|n+1|^n\cdot n^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{n^{1+\delta}}$$

亦即

$$|Q(\nu\,,s)|\leq\frac{1}{s^{\nu}}+\frac{K^*e^{1-\mathrm{Re}s}}{|\Gamma(s)|}\zeta(1+\delta)$$

由於$\zeta(1+\delta)$在$\delta\geq\delta_0>0$處均勻收斂，且當$(\nu\,,s)\in I_\varepsilon(\delta)$，$s^{-\nu}$，$|\Gamma(s)|$及$e^{1-\mathrm{Re}s}$均為有限值，故由Weierstrass M-檢定可知$Q(\nu\,,s)$在$I_\varepsilon(\delta)$上均勻收斂。因此，若$0<\mathrm{Re}s<1<m$，則

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n^{[k]}(s)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(m)}{(n+s)^m}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(s+a)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(m)}{(n+s)^m}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(s+a)}{\Gamma(n+1)}$$

$$\cdot\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-(n+s)x}dx$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-sx}(1-e^{-x})^{-s-a}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}\lim\limits_{a\to 0}\frac{\partial^k}{\partial a^k}(1-e^{-x})^{-a}}{(e^x-1)^s}dx$$

$$=(-1)^k\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}[\log(1-e^{-x})]^k}{(e^x-1)^s}dx$$

$$=(-1)^k\omega_2(m\,,k\,;s)$$

也就是

(3.34) $$\omega_2(m\,,k\,;s)=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n^{[k]}(s)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(m)}{(n+s)^m}$$

其中m，$k\in Z^+$且$0<\mathrm{Re}s<1<m$。如欲計算$h_n^{[k]}(s)$，先對$h_n(s)$取對數，得

$$\log h_n(s)=\log\Gamma(n+s)-\log\Gamma(s)$$

微分給出

(3.35) $$h_n'(s)=h_n(s)[\varphi(s)-\varphi(n+s)]$$

定義符號

$$H_0=h_n(s)$$

$$H_k=h_n^{(k)}(s)=\frac{d^kH_0}{ds^k}$$

$$\triangle_0=\varphi(s)-\varphi(n+s)$$

$$\triangle_k=\frac{d^k\triangle_0}{ds^k}$$

則(3.35)可改寫爲

$$H_1=H_0\triangle_0$$

經簡單計算，給出

$$H_2=H_0(\triangle_0^2+\triangle_1)$$

$$H_3=H_0(\triangle_0^3+3\triangle_0\triangle_1+\triangle_2)$$

這些公式，很明顯與前曾計算過的 B_n 是完全一樣的，因此，我們可利用(3.19)～(3.22)等式子求出部分 $h_n^{(k)}(s)$ 如下

(3.36) $$h_n''(s)=h_n(s)\{[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^2+\varphi'(s)-\varphi'(n+s)\}$$

(3.37) $$h_n'''(s)=h_n(s)\{[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^3+3[\varphi(s)-\varphi(n+s)]\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]+\varphi''(s)-\varphi''(n+s)\}$$

(3.38) $$h_n^{(4)}(s)=h_n(s)\{[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^4+6[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^2\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]+4[\varphi(s)-\varphi(n+s)]\times[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]+3[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]^2+\varphi'''(s)-\varphi'''(n+s)\}$$

(3.39) $$h_n^{(5)}(s)=h_n(s)\{[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^5+10[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^3\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]+10[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^2\times[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]+15[\varphi(s)-\varphi(n+s)]\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]^2+5[\varphi(s)-\varphi(n+s)]\times[\varphi'''(s)-\varphi'''(n+s)]+10[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]\times[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]+\varphi^{(4)}(s)-\varphi^{(4)}(n+s)\}$$

如定義

$$\Lambda_n=\frac{h_n(s)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(m)}{(n+s)^m}$$

並將(3.35)～(3.39)代入(3.34)得

(3.40) $$\omega_2(m,1;s)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]$$

(3.41) $$\omega_2(m,2;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^2+\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]$$

(3.42) $$\omega_2(m,3;s)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^3-3\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]-\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]$$

(3.43) $$\omega_2(m,4;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^4+6\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^2\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]+4\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]\times[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]$$

$$+3\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]^2$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi'''(s)-\varphi'''(n+s)]$$

(3.44) $\omega_2(m, 5; s)$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^5$$

$$-10\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^3$$

$$\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]$$

$$-10\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]^2$$

$$\times[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]$$

$$-15\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]$$

$$\times[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]^2$$

$$-5\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi(s)-\varphi(n+s)]$$

$$\times[\varphi'''(s)-\varphi'''(n+s)]$$

$$-10\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi'(s)-\varphi'(n+s)]$$

$$\times[\varphi''(s)-\varphi''(n+s)]$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n[\varphi^{(4)}(s)-\varphi^{(4)}(n+s)]$$

四、Beta逆變換定義

由Mellin 變換之定義

$$G(u)=\int_0^{\infty}\lambda^{u-1}g(\lambda)d\lambda$$

令 $\lambda=e^x-1$, $u=1-s$ ，則有

$$G(1-s)=\int_0^{\infty}\frac{e^x g(e^x-1)}{(e^x-1)^s}dx$$

另由逆變換公式

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\lambda^{-u}G(u)du$$

代入相同值，得出

$$g(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\alpha-i\infty}^{1-\alpha+i\infty}(e^x-1)^{s-1}G(1-s)ds$$

如令

$$c=1-\alpha$$

$$f(x)=e^x g(e^x-1)$$

$$F(s)=G(1-s)$$

則得

$$F(s)=\int_0^{\infty}\frac{f(x)dx}{(e^x-1)^s}$$

$$f(x)=\frac{e^x}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(e^x-1)^{s-1}F(s)ds$$

因此，這二式可作爲 $f(x)$ 的 Beta 互逆變換公式。爲證明此點，令 $s=\sigma+it$ ，σ 和 t 均爲實數，並定義二個無限長數帶

$$S_T=\{s: 0<\sigma<T\}$$

$$S_\varepsilon=\{s: \varepsilon\leq\sigma\leq T-\varepsilon\}$$

這裡 T 爲正常數且 ε 爲任意小的正數。

定理4.1：假設 $F(s)\in \mathrm{Hol}(S_T)$ ，並在 S_ε 中，當 $|t|\to\infty$ 時， $F(s)\to 0$ ，而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+i\tau)d\tau \text{ 絕對收斂}, \forall\sigma\in S_T$$

若有正實數 x 及固定常數 $c\in(0, T)$ ，定義

$$f(x)=\frac{e^x}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(e^x-1)^{s-1}F(s)ds$$

則在 S_T 中

$$F(s)=\int_0^{\infty}\frac{f(x)dx}{(e^x-1)^s}$$

證明：令 ${}_\tau E$ 表示複數平面上由 $c_1+i\tau$ ，$c_2+i\tau$ ，$c_2-i\tau$ ，$c_1-i\tau$ 所圍成的矩形區域，$\partial_\tau E$ 爲其邊界，其中 $0<c_2<c_1<T$ ，如圖4.1所示。

由於在 S_ε 中，當 $|t|\to\infty$ 時，$F(s)$ 均勻收斂至零，因此，我們必可找到一正常數 M ，使得

$$|F(s)|\leq M, \forall s\in S_\varepsilon$$

由於 $F(s)\in \mathrm{Hol}(S_T)$ ，故若 $s\in {}_\tau E$ ，則積分

$$J_+=\left|\int_{c_1+i\tau}^{c_2+i\tau}\frac{F(u)}{u-s}du\right|$$

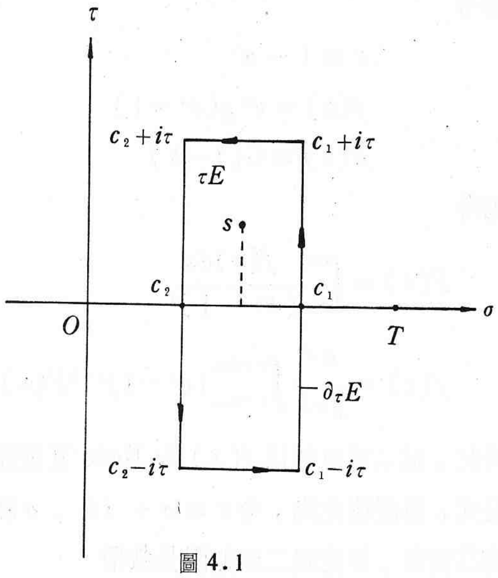

圖 4.1

$$\le \int_{c_1}^{c_2}\left|\frac{F(y+\tau\ )}{y+\tau\ \ -s}\right|dy$$

$$\le M\int_{c_1}^{c_2}\frac{dy}{\sqrt{(y-\sigma)^2+(\tau-t)^2}}$$

以及

$$J_-=\left|\int_{c_1-i\tau}^{c_2-i\tau}\frac{F(u)}{u-s}du\right|$$

$$\le \int_{c_1}^{c_2}\left|\frac{F(y-i\tau)}{y-i\tau-s}\right|dy$$

$$\le M\int_{c_1}^{c_2}\frac{dy}{\sqrt{(y-\sigma)^2+(\tau+t)^2}}$$

經由簡單計算，給出

$$J_\pm \le M\log\frac{c_2-\sigma+\sqrt{(c_2-\sigma)^2+(\tau\mp t)^2}}{c_1-\sigma+\sqrt{(c_1-\sigma)^2+(\tau\mp t)^2}}$$

很容易看出當 $\tau\to\infty$，J_+ 與 J_- 均趨於零，也就是

$$\lim_{\tau\to\infty}J_+=\lim_{\tau\to\infty}J_-=0 \tag{4.1}$$

再次引用 $F(s)$ 在 S_ε 中均勻收斂至零的條件，選取如圖4.1的 c_1 和 c_2，$0<c_2<\sigma<c_1<T$，並定義積分

$$I_1=\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{-s}dx$$

$$\cdot\frac{e^x}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}(e^x-1)^{u-1}F(u)du$$

$$I_2=\int_{\log 2}^{\infty}(e^x-1)^{-s}\,dx$$

$$\cdot\frac{e^x}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}(e^x-1)^{u-1}F(u)du$$

顯然

$$\int_0^\infty\frac{f(x)dx}{(e^x-1)^s}=I_1+I_2$$

由於 $c_1>\sigma$，因此

$$\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{c_1-\sigma-1}e^x\,dx$$

收斂，並且我們有

$$\left|\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}F(u)du\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{u-s-1}e^x dx\right|$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}|F(c_1+i\tau)|d\tau\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{c_1-\sigma-1}\cdot e^x dx$$

因積分

$\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+i\tau)d\tau$ 絕對收斂，$\forall s\in S_T$

故由前面不等式，易知

$$\left|\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}F(u)du\cdot\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{u-s-1}\cdot e^x dx\right|<\infty$$

亦即我們可變換積分 I_1 的積分順序，得

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}F(u)du\cdot\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{u-s-1}e^x dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{F(u)}{u-s}du$$

同理，若 $c_2<\sigma$，則積分

$$\int_{\log 2}^{\infty}(e^x-1)^{c_2-\sigma-1}e^x dx$$

收斂，且不難證明 I_2 亦可變換積分順序，並求出

$$I_2=\frac{-1}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{F(u)}{u-s}\,du$$

於是

$$(4.2)\qquad \int_0^\infty \frac{f(x)dx}{(e^x-1)^s} =\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}-\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\right)\cdot\frac{F(u)}{u-s}\,du$$

現沿著 ${}_\tau E$ 的邊界 $\partial_\tau E$ 對 $\dfrac{F(u)}{u-s}$ 積分，若 $s\in {}_\tau E$，則

$$\int_{\partial_\tau E}\frac{F(u)}{u-s}\,du =\left(\int_{c_1-i\tau}^{c_1+i\tau}+\int_{c_1+i\tau}^{c_2+i\tau}+\int_{c_2+i\tau}^{c_2-i\tau}+\int_{c_2-i\tau}^{c_1-i\tau}\right)\cdot\frac{F(u)}{u-s}\,du$$

$$=\left(\int_{c_1-i\tau}^{c_1+i\tau}-\int_{c_2-i\tau}^{c_2+i\tau}\right)\frac{F(u)}{u-s}\,du+\left(\int_{c_1+i\tau}^{c_2+i\tau}-\int_{c_1-i\tau}^{c_2-i\tau}\right)\frac{F(u)}{u-s}\,du$$

由於 $F(s)\in \mathrm{Hol}(S_T)$ 且 $s\in {}_\tau E\subset {}_\infty E$，故函數 $\dfrac{F(u)}{u-s}$ 僅有單純極點 $u=s$，由 Cachy 積分公式得

$$\int_{\partial_\infty E}\frac{F(u)}{u-s}\,du =\lim_{\tau\to\infty}\int_{\partial_\tau E}\frac{F(u)}{u-s}\,du$$

$$=\left(\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}-\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\right)\frac{F(u)}{u-s}\,du+\lim_{\tau\to\infty}J_+-\lim_{\tau\to\infty}J_-$$

$$=2\pi i\,F(s)$$

應用 (4.1) 式，則給出

$$(4.3)\qquad \left(\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}-\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\right)\frac{F(u)}{u-s}\,du =2\pi i\,F(s)$$

很明顯地，(4.2) 及 (4.3) 已蘊涵定理成立的事實。證畢。

五、結 語

Hardy 曾證明 $\zeta(\nu)$ 在 $\mathrm{Re}\,\nu=\frac{1}{2}$ 有無限多零點，Levinson 更證出若 $0\le \mathrm{Re}\,\nu\le 1$，則 $\zeta(\nu)$ 有超過 $\frac{1}{3}$ 的零點集中在 $\mathrm{Re}\,\nu=\frac{1}{2}$ 線上。根據第三節 $Q(\nu,s)$ 之定義知

$$\zeta(\nu)=Q(\nu,1)$$

因此，我們很想知道

問題 1： $Q(\nu,s)$ 除 $\mathrm{Re}\,\nu=\frac{1}{2}$，$s=1$ 外，還有沒有其他零點存在？($0\le \mathrm{Re}\,\nu\le 1$)

筆者曾嘗試過利用 Euler-Maclaurin 公式計算 $Q(\nu,s)$ 之數值，結果發現得先求解積分

$$\int_1^\infty \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{dx}{(x+s)^\nu}$$

至今仍找不出理想的答案。故有

問題 2： 求解積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{dx}{(x+s)^\nu}$

由定理 3.2 我們聯想到 Fourier 分析的 Riemann-Lebesgue 引理，自然會企圖引用群論來研究 Beta 變換。於是，底下又產生兩個問題

問題 3：引進Fourier分析的技巧研究 Beta 變換。

問題 4：引用群論研究Beta 變換。

應用(3.30)式，令$\nu=3$，$s=2$，得

$$\mathscr{B}[x^2;2]$$
$$=2\mathscr{B}[x;1]-\mathscr{B}[x^2;1]$$
$$=\Gamma(3)[\zeta(2)-\zeta(3)]$$

如設$\nu=4$，$s=3$，便有

$$\mathscr{B}[x^3;3]$$
$$=\frac{3}{2}\mathscr{B}[x^2;2]-\mathscr{B}[x^3;2]$$
$$=\frac{3}{2}\Gamma(3)[\zeta(2)-\zeta(3)]$$
$$-3\mathscr{B}[x^2;1]+\mathscr{B}[x^3;1]$$
$$=\Gamma(4)[\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{2}\zeta(3)]$$
$$-3\Gamma(3)\zeta(3)+\Gamma(4)\zeta(4)$$
$$=\Gamma(4)[\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{3}{2}\zeta(3)$$
$$+\zeta(4)]$$

很明顯地，若k，m均為正整數且$k\geq m$，則$\mathscr{B}[x^k;m]$可表成$\zeta(n)$的多項式，所以，底下問題便值得一試

問題 5：化$\mathscr{B}[x^k;m]$爲$\zeta(n)$的多項式，並推廣到k，m均爲複數的情況。

經實際計算

$$\frac{d^k}{ds^k}\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{(e^x-1)^s}$$
$$=\frac{d^k}{ds^k}(\frac{\pi}{\sin\pi s})\Phi_m(s)$$
$$=\int_0^\infty\frac{x^{m-1}[-\log(e^x-1)]^k}{(e^x-1)^s}dx$$
$$=(-1)^k\omega_1(m,k;s)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^k\omega_2(m+k-j,j;s)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k+j}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{h_n^{(j)}(s)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(m+k-j)}{(n+s)^{m+k-j}}\right]$$

式中隱含不少特殊形式的級數，因過於繁雜且牽涉到$\Phi_n^{(k)}(s)$及$h_n^{(k)}(s)$之冗長計算，尚未得出滿意的結果，故提出

問題 6：研究由函數$\omega_1(m,k;s)$及$\omega_2(m,k;s)$所得出的級數。

一般我們熟知的Laplace變換、Fourier變換及Mellin 變換等等，均有實用價值。理所當然，我們會爲Beta 變換尋求實際應用的例子。因而給出

問題 7：找出應用Beta 變換的實例。

當然，欲找出Beta 變換可實際應用的例子，最好同時朝最後這個問題進行研究

問題 8：求解各種特殊函數的Beta 變換。

參考書目

1. Conway, J.B., *Fun Functions of One Complex Variable*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1978.
2. Gradshteyn, I.S. and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 4th ed., Academic Press, 1965.
3. Sneddon, I.N., *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, 1972.

——本文作者任職於台北工專電算中心——