圖解不等式

葉東進

有些不等式的證明或求解，如果改從幾何的觀點來處理，不僅饒富趣味並且深具意義。利用圖形的轉化，使得問題呈現出更具體的面貌；尤其對於高中理科學生來說，此種轉化的內涵是基礎數學的一種統合，不論是敎或學，都是非常重要的素材。

下面舉一些問題的處理作例：

1.(1)設 n 是正整數，證明 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$。

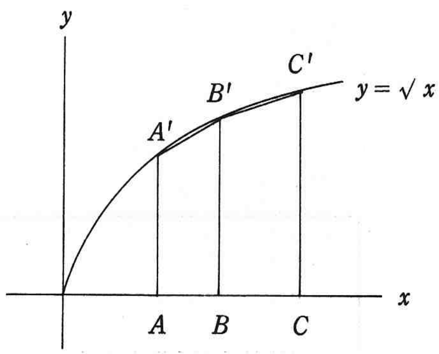
(2)設 a、b 是相異正數，證明 $\sqrt[3]{18a+9b}>2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$。

證明：(1)由於 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{2}<\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (*_1)$$

因此我們把目標放在式 $(*_1)$ 的證明上。

考慮曲線 $y=\sqrt{x}$，$x\geq 0$ 的圖形如下：



在 x 軸上取 A、B 及 C 三點其坐標分別為 $(n-1,0)$、$(n,0)$ 及 $(n+1,0)$。

過 A、B、C 分別作 y 軸的平行線交曲線 $y=\sqrt{x}$ 於點 A'、B'、C'，則

$$\overline{AA'}=\sqrt{n-1},\ \overline{BB'}=\sqrt{n}$$
$$\overline{CC'}=\sqrt{n+1}$$

$\therefore$ 梯形 $AA'B'B$ 的中線

$$=\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{2}$$

梯形 $BB'C'C$ 的中線

$$=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}$$

但是

梯形 $AA'B'B$ 的中線 $<\overline{BB'}<$ 梯形 $BB'C'C$ 的中線

故 $$\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{2}<\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}$$

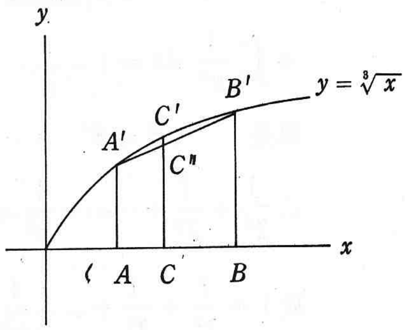
(2)由於 $\sqrt[3]{18a+9a}>2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{2a+b}{3}}>\frac{2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*_2)$$

因此我們把目標放在式 $(*_2)$ 的證明上。

考慮曲線 $y=\sqrt[3]{x}$，$x\geq 0$ 的圖形如下：

在 x 軸上取 A、B、C 三點，使 $A=(a,0)$，$B=(b,0)$ 而 C 是線段 AB 上的分點滿足 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$，則 $C=(\frac{2a+b}{3},0)$



過 A、B、C 分別作 y 軸的平行線交曲線 $y=\sqrt[3]{x}$ 於點 A'、B'、C'，又線段 CC' 交線段 $A'B'$ 於點 C'' 則

$$\overline{AA'}=\sqrt[3]{a},\ \overline{BB'}=\sqrt[3]{b},$$

$$\overline{CC'}=\sqrt[3]{\frac{2a+b}{3}}$$

另外 $\overline{CC''}=\dfrac{2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{3}$

但是 $\overline{CC'}>\overline{CC''}$

故 $\sqrt[3]{\dfrac{2a+b}{3}}>\dfrac{2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{3}$

2.設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \geq 0$，證明，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

證明：考慮對數函數 $f(x)=\log x$，$x>0$，由於它是凸函數，滿足 $f(\dfrac{a_1+a_2}{2})\geq\dfrac{f(a_1)+f(a_2)}{2}$（見下圖）

我們可以運用數學歸納法證明它會滿足：

$$f(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n})\geq$$

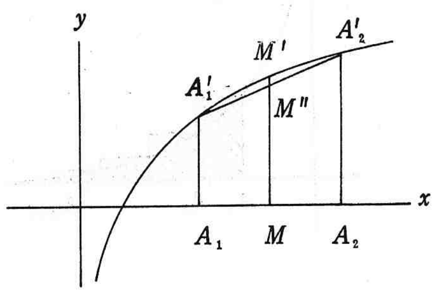
$$\frac{1}{n}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots\cdots+f(a_n)]$$

$$\therefore \log\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

$$\geq\frac{1}{n}(\log a_1+\log a_2+\cdots\cdots+\log a_n)$$

$$=\frac{1}{n}\log a_1a_2\cdots\cdots a_n$$

$$=\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$



但是 $f(x)$ 是一個遞增函數，故得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

3.設 α、β、γ 是三角形 ABC 的三個內角，證明 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

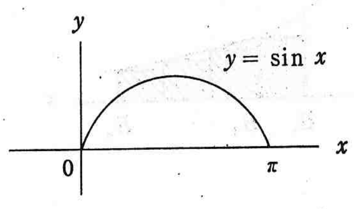
證明：因為函數 $\sin x$ 在區間 $(0,\pi)$ 上是一個凸函數，而 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$

$$\therefore \sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})\geq\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

但是 $\sin(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3})=\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

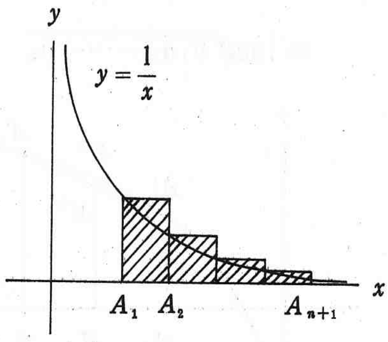


4.設 n 是正整數，證明

(1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>ln(n+1)$

(2) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leq 2-\dfrac{1}{n}$

證明：(1)考慮曲線 $y=\dfrac{1}{x}$，$x>0$ 的圖形：



在 x 軸上取點 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n+1}$，其坐標爲 $A_i=(i, 0)$，$i=1, 2, \cdots\cdots, n+1$ 由圖中知道：

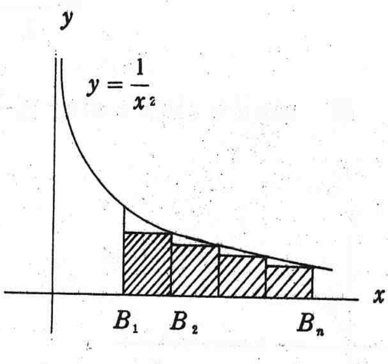
斜線區域的面積 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$；而曲線 $y=\frac{1}{x}$ 與 x 軸及直線 $x=1$，$x=n+1$ 所圍區域的面積 S'

$$=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=ln(n+1)$$

但是 $S>S'$

故 $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>ln(n+1)$$

(2)考慮曲線 $y=\frac{1}{x^2}$，$x>0$ 的圖形。



在 x 軸上取點 $B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$，其坐標爲 $B_i=(i, 0)$，$i=1, 2, \cdots\cdots, n$ 由圖形知道：

斜線區域的面積 $S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$；而曲線 $y=\frac{1}{x^2}$ 與 x 軸及直線 $x=1$，$x=n$ 所圍區域的面積 S'

$$=\int_1^n\frac{1}{x^2}\,dx=1-\frac{1}{n}$$

但是 $S<S'$

$$\therefore \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$$

故 $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

5.證明 $x=\pi$ 滿足不等式

$$\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}<\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^3。$$

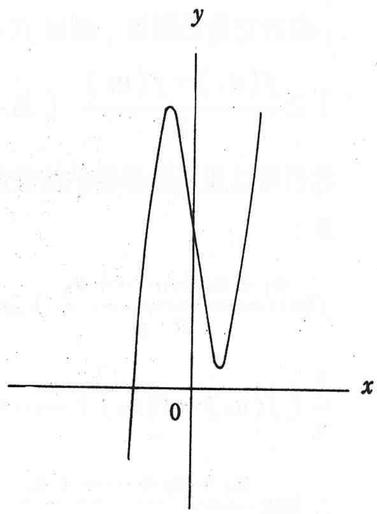
證明：由於 $x=\pi$ 滿足不等式

$$\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}<\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^3。$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}<\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3$$

$$\Longleftrightarrow \pi^3>36\pi-54\sqrt{3}\cdots\cdots(*_3)$$

因此我們把目標放在式 $(*_3)$ 的證明上。考慮函數 $f(x)=x^3-36x+54\sqrt{3}$ 它的圖形如下圖所示。可以看出在區間



$[0, \infty)$ 上有 $f(x)>0$，而由 $\pi\in[0, \infty)$，知 $f(\pi)>0$

即 $\pi^3>36\pi-54\sqrt{3}$

6.(1)設 a、b、c 是已知的實數，a、b 不全爲零，求

$$a\cos t+b\sin t+c \quad (t\in R)$$

的最大值與最小值。

(2)設 a_1,a_2,a_3；b_1,b_2,b_3 爲實數，證明 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$$\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

證明：(1)因爲 c 是常數，僅先考慮函數 $a\cos t+b\sin t$。

設 P 是圓 C：$x^2+y^2=1$ 上的動點所以 P 的坐標可以寫爲 $(\cos t,\sin t)$，$t\in R$

又 P 到直線 l：$ax+by=0$ 的距離是

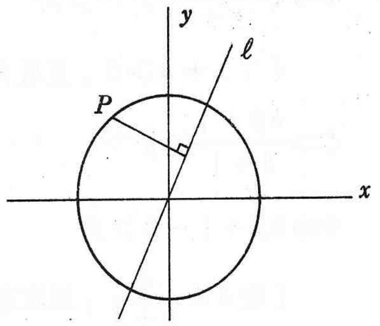
$$d(P,l)=\frac{|a\cos t+b\sin t|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

但是 l 通過圓心 $(0,0)$

$\therefore\ d(P,l)\leq$ 半徑 $=1$

即 $$\frac{|a\cos t+b\sin t|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$$

$\therefore\ -\sqrt{a^2+b^2}+c\leq a\cos t+b\sin t+c\leq\sqrt{a^2+b^2}+c$



(2)取 $k=a_1^2+a_2^2+a_3^2$，然後考慮球面 S：$x^2+y^2+z^2=k$

又，取平面 E：$b_1x+b_2y+b_3z=0$

由 $k=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 知道點 Q：(a_1,a_2,a_3) 落在球面 S 上，且點 Q 到平面 E 的距離是

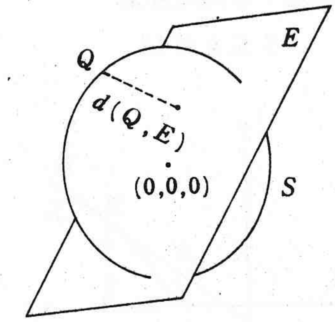
$$d(Q,E)=\frac{|b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

但是 E 通過 S 的球心 $(0,0,0)$，

$\therefore\ d(Q,E)\leq$ 半徑 $=\sqrt{k}$

即 $$\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\leq\sqrt{k}$$

故 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$



7.解不等式

(1) $x^2-2x-3>3|x-1|$

(2) $x-1>\sqrt{x^2-25}$

解：(1)考慮曲線 γ_1：$y=x^2-2x-3$

及 曲線 γ_2：$y=3|x-1|$ 的圖形。欲求 $x^2-2x-3>3|x-1|$ 之解，即求曲線 γ_1 在 γ_2 的上方時之 x 的範圍。由下圖中可以看出：在 A 點的右側以及 B 點的左側，曲線 γ_1 落在 γ_2 的上方。

解 $\begin{cases} x^2-2x-3=3(x-1), \\ x>0 \end{cases}$ 得 $x=5$

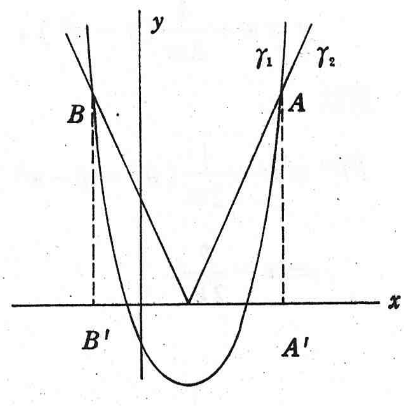
$\therefore A'=(5,0)$

解 $\begin{cases} x^2-2x-3=-3(x-1), \\ x<0 \end{cases}$ 得 $x=-3$

$\therefore B'=(-3,0)$

因此所求之不等式的解是

$$x<-3 \quad 或 \quad x>5$$



(2)仿同題(1)的道理。

$$x-1>\sqrt{x^2-25}$$

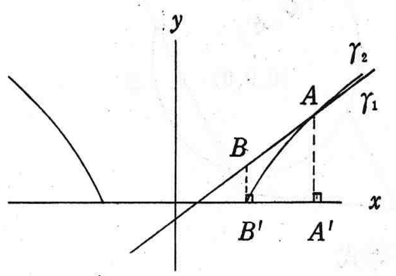
$\Longleftrightarrow$曲線 γ_1 : $y=x-1$ 落在曲線 γ_2 : $y=\sqrt{x^2-25}$ 的上方

$\Longleftrightarrow B'$ 的 x 坐標 $\leq x<A'$ 的 x 坐標

但是 $B'=(5,0)$, $A'=(13,0)$

因此所求之不等式的解是

$$5\leq x<13$$



8.證明下面阿基米德求平方根所利用的不等式

設 p、$w>0$, $p<2w-1$, 則

$$w-\frac{p}{2w-1}<\sqrt{w^2-p}<w-\frac{p}{2w}$$

證明:考慮曲線 $y=\sqrt{x}$

在 x 軸上取點 $A=((w-1)^2,0)$, $P=(w^2-p,0)$, $B=(w^2,0)$

因為 $\overline{AP}:\overline{PB}=2w-1-p:p$

所以

$$\overline{PP'}=\frac{p\overline{AA'}+(2w-1-p)\overline{BB'}}{(2w-1-p)+p}$$

$$=\frac{p(w-1)+(2w-1-p)w}{2w-1}$$

$$=w-\frac{p}{2w-1}$$

又,過 B' 點的切線 l 是

$$y=w+\frac{1}{2w}(x-w^2),$$

所以

$$\overline{PP''}=w+\frac{1}{2w}(w^2-p-w^2)$$

$$=w-\frac{p}{2w}$$

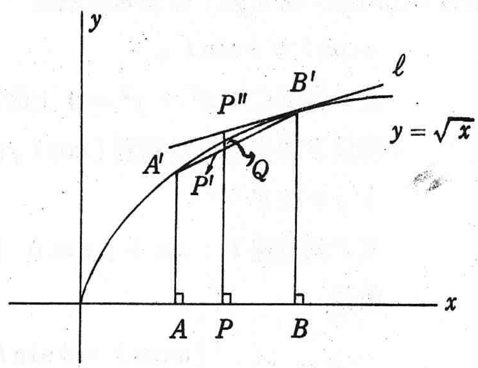
但是 $\overline{PP'}<\overline{PQ}<\overline{PP''}$

且 $\overline{PQ}=\sqrt{w^2-p}$

故 $$w-\frac{p}{2w-1}<\sqrt{w^2-p}<w+\frac{p}{2w}$$

註:同樣方法可以證明:設 p、$w>0$, 則

$$w+\frac{p}{2w+1}<\sqrt{w^2+p}<w+\frac{p}{2w}$$



9.設 $\alpha<0$, $1+\alpha>0$, k 是正整數,則

$$\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}>(1+\alpha)^k$$

證明:先作分析:

$$\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}>(1+\alpha)^k$$

$$\Longleftrightarrow\left(\frac{k\beta+1}{k+1}\right)^{k+1}>\beta^k$$

($\because 1+\alpha>0$, 且取 $\beta=1+\alpha$)

$$\Longleftrightarrow\frac{k\beta+1}{k+1}>\beta^{\frac{k}{k+1}}$$

$$\Longleftrightarrow h\beta+1-h>\beta^h$$

(取 $h=\dfrac{k}{k+1}$, 並注意 $0<h<1$)

$\Longleftrightarrow h$ 是不等式 $x(\beta-1)+1>\beta^x$ 的一個解……………………………($*_4$)

因此我們把目標放在式($*_4$)的證明上。

考慮曲線 γ_1 : $y=x(\beta-1)+1$ 及

曲線 γ_2 : $y=\beta^x$, $0<\beta<1$;

它們的交點是 $A=(0,1)$ 及 $B=(1,\beta)$, 由圖中知道:

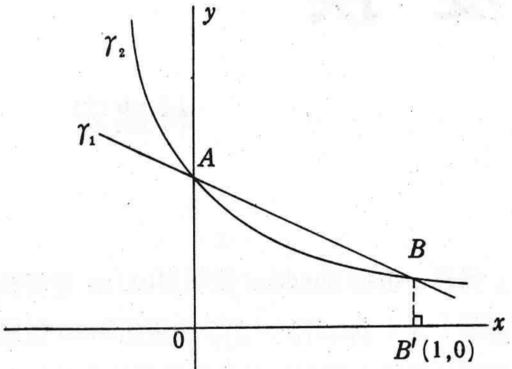
$$x(\beta-1)+1>\beta^x$$

$\Longleftrightarrow\gamma_1$ 落在 γ_2 的上方

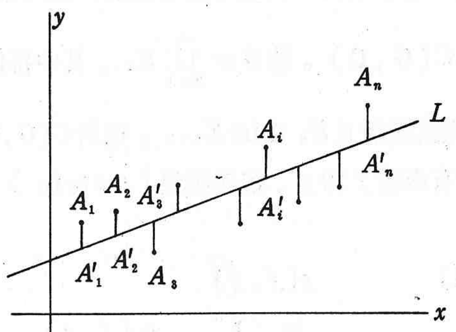
$\Longleftrightarrow 0 < x < 1$

由於 $0 < h < 1$，所以 h 滿足 $x(\beta - 1) + 1 > \beta^x$，隨之證得：

$$\left(1 + \frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1} > (1+\alpha)^k$$



10.平面上，n 個已知點 $A_i = (x_i, y_i)$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。試找出直線 L：$y = mx + k$ 使過 A_i 而平行 y 軸之諸直線交 L 於諸點 A_i' 時能滿足 $\overline{A_1A_1'}^2 + \overline{A_2A_2'}^2 + \cdots\cdots + \overline{A_nA_n'}^2$ 爲最小。



解：因爲 $\overline{A_1A_1'}^2 + \overline{A_2A_2'}^2 + \cdots\cdots + \overline{A_nA_n'}^2$

$= (mx_1 + k - y_1)^2 + (mx_2 + k - y_2)^2 + \cdots\cdots + (mx_n + k - y_n)^2$

當我們取向量

$\mathbf{V} = (mx_1 + k - y_1, mx_2 + k - y_2, \cdots\cdots, mx_n + k - y_n)$

$= m(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) + k(1, 1, \cdots\cdots, 1) - (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$

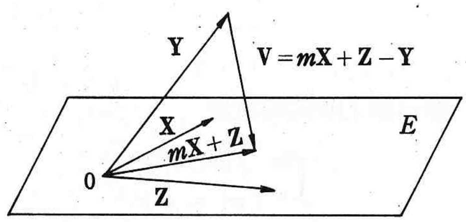
$= m\mathbf{X} + k\mathbf{Z} - \mathbf{Y}$ 時，

其中 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$\mathbf{Z} = (1, 1, \cdots\cdots, 1)$，$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 均爲已知向量。

問題的目標變成：如何找出 m 與 k 的值，使 $\mathbf{V}$ 的長度最小。

由於 $m\mathbf{X} + k\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{Z}$ 所張拓的平面 E 上的向量，因此由圖中，我們看出 $\mathbf{V}$ 的長度最小的充分、必要條件是 $\mathbf{V}$ 垂直平面 E，即

$$\mathbf{V} \perp \mathbf{X} \quad 且 \quad \mathbf{V} \perp \mathbf{Z}$$



$$\therefore \begin{cases} (m\mathbf{X} + \mathbf{Z} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} = 0 \\ (m\mathbf{X} + \mathbf{Z} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Z} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)k = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + nk = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

得 $$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$