11102　T－集合元素個數之最大可能值

（王子俠提供）

假定S爲一T－集合且對所有之T－集合S'均滿足$|S|\geq|S'|$，則稱S爲一極大T－集合。令$S=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k\}$表一極大$T$－集合，$k\geq 3$，此處$a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots<a_k$。若$a_2$與$a_3$非相鄰整數，則$S'=S\cup\{a_2+1\}$顯然亦爲一$T$－集合，而$|S'|=|S|+1$，此爲矛盾。故$a_2$與$a_3$爲相鄰整數；同理，對所有$i=3, 4, \cdots\cdots, k-1$，$a_i$與$a_{i+1}$均爲相鄰整數。但$a_1$與$a_2$未必相鄰。若$a_1+2<a_2$，則$S'=(S\sim\{a_1\})\cup\{a_1+1, a_1+2\}$顯然亦爲一$T$－集合，而$|S'|=|S|+1$，此爲矛盾。故在$a_1$與$a_2$之間最多只有一個整數。若$a_k<n-1$，則$a_k+2\leq n$，又$a_1<a_2$

$< a_3$，故 $a_3 \geq a_1 + 2$；但 $a_1 + a_2 > a_k$，故 $a_2 + a_3 \geq a_1 + a_2 + 2 > a_k + 2$。即 $S' = (S \sim \{a_1\}) \cup \{a_k + 1, a_k + 2\}$ 亦爲一 T-集合，而 $|S'| = |S| + 1$，此爲矛盾。故 $a_k \geq n - 1$。現分兩種情形討論：

(1)所有 S 中之數均兩兩相鄰；即 $S = \{a, a+1, a+2, \cdots\cdots, a+q\}$。又分兩種情形:

(a)假定 $a + q = n - 1$，則 $2a + 1 > n - 1 \Rightarrow 2a + 1 \geq n$；但 $2a + 1 > n$ 不可能，否則 $S' = S \cup \{n\}$ 亦爲一 T-集合，而 $|S'| = |S| + 1$，此爲矛盾。故 $2a + 1 = n$，於是 $n = 2m + 1$ 爲奇數，而 $a = m = \dfrac{n-1}{2}$。

故　$S = \{\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2}, \cdots, n-1\}$

而　$|S| = \dfrac{n+1}{2}$ ……………………………①

(b)假定 $a + q = n$，則 $2a + 1 > n$。再分兩種情形：

ⓐ若 $n = 2m$ 爲偶數，則 $2a + 1 > n \Rightarrow 2a \geq 2m \Rightarrow a \geq m$；但 $a \geq m + 1$ 不可能，否則 $2a - 1 \geq 2m + 1 > n \Rightarrow S' = S \cup \{a - 1\}$ 亦爲一 T-集合而 $|S'| = |S| + 1$，此爲矛盾。故 $a = m = \dfrac{n}{2}$。

即　$S = \{\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2} + 1, \cdots\cdots, n\}$

而　$|S| = \dfrac{n}{2} + 1$ ……………………………②

ⓑ若 $n = 2m + 1$ 爲奇數，則 $2a + 1 > n \Rightarrow a > m \Rightarrow a \geq m + 1$；但 $a \geq m + 2$ 不可能，否則 $2a - 1 \geq 2m + 3 > n \Rightarrow S' = S \cup \{a - 1\}$ 亦爲一 T-集合，而 $|S'| = |S| + 1$，此爲矛盾。故 $a = m + 1 = \dfrac{n+1}{2}$。

即 $S=\{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\cdots\cdots,n\}$

而 $|S|=\frac{n+1}{2}$ ……………………③

由①、②及③可知在情形(1)之下，$|S|=[\frac{n}{2}]+1$ 爲最大可能值。

(2) a_1 與 a_2 之間恰有一整數，即 $a_2=a_1+2$，於是可令 $S=\{a,a+2,a+3,\cdots\cdots,a+q\}$ 也分兩種情形討論：

(a)若 $a+q=n-1$，則 $2a+2>n-1$ $\Rightarrow$ $2a>n-3$；但 $2a>n-2$ 不可能，否則 $2a+1>n-1$ $\Rightarrow$ $S'=S\cup\{a+1\}$ 亦爲一 T-集合，而 $|S'|=|S|+1$，此爲矛盾。故 $2a=n-2$。於是 $n=2m$ 爲偶數而 $a=m-1=\frac{n-2}{2}$。

即 $S=\{\frac{n-2}{2},\frac{n+2}{2},\cdots\cdots,n-1\}$

，但 $|S|=\frac{n}{2}$，故不可能爲極大之 T-集合。

(b)若 $a+q=n$，則 $2a+2>n$ $\Rightarrow$ $2a>n-2$；但 $2a>n-1$ 不可能，否則 $2a+1>n$ $\Rightarrow$ $S'=S\cup\{a+1\}$ 亦爲 T-集合，而 $|S'|=|S|+1$，此爲矛盾。故 $2a=n-1$。於是 $n=2m+1$ 爲奇數，而 $a=m=\frac{n-1}{2}$。

即 $S=\{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2},\cdots\cdots,n\}$

而 $|S|=\frac{n+1}{2}=[\frac{n}{2}]+1$ ………④

由①、②、③、④便得結論：

ⓐ $f(n)=[\frac{n}{2}]+1$

ⓑ當 n 之偶數時，有唯一之極大 T-集合：

$S=\{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1,\cdots\cdots,n\}$，當 n 爲奇數時（$n\geq 5$）有三個極大 T-集合：

$S_1=\{\frac{n-1}{2},\frac{n+2}{2},\cdots\cdots,n-1\}$

$S_2=\{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\cdots\cdots,n\}$

$S_3=\{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2},\cdots\cdots,n\}$

例：當 $n=7$ 時，$S_1=\{3,4,5,6\}$，$S_2=\{4,5,6,7\}$，$S_3=\{3,5,6,7\}$