上期徵答問題

優勝名單

11101 優勝名單

良好：楊穎榮（海洋船機）
張國良（台大農工）
可：胡豐榮（台中師專）

11102 優勝名單

優良：胡豐榮（台中師專）
張國良（台大農工）
楊穎榮（海洋船機）

問題詳解

11101 以複數方法解正多邊形外接圓問題
解答（朱建正 提供）

本次共有四人應答，可惜沒有人運用複數乘法來解，沒有發揮複數幾何的優點，茲將此一解法敍述如下：

解答：即證明

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(\omega^k-a)\overline{\omega}^{\frac{k}{2}}=0$$

上式等於

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\omega^{\frac{k}{2}}-a\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\overline{\omega}^{\frac{k}{2}}$$

$$=\frac{1+(\omega^{\frac{1}{2}})^{2n+1}}{1+\omega^{\frac{1}{2}}}$$

$$-a\frac{1+(\overline{\omega}^{\frac{1}{2}})^{2n+1}}{1+\overline{\omega}^{\frac{1}{2}}}$$

但 $(\omega^{\frac{1}{2}})^{2n+1}=e^{\frac{2\pi i}{2(2n+1)}(2n+1)}=e^{\pi i}$

$=-1$ 故得證

此處 $|a|=1$，表外接圓上一點，我令它在 1 與 ω^{2n} 之間。ω 爲 1 的 $2n+1$ 次原根。

楊顯堅和張國頁的解法類似。先由兩複數夾角之正弦公式

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\frac{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2}{|z_1z_2|}$$

導出諸弦長之代數和為

$$\sum_{m=1}^{n}i(z^m+\bar{z}^m)$$

再由　$z^{2n+1-k}=\bar{z}^k$ 及 $1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{2n}=0$　得證

胡豐榮則將 $PA_k=2\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}-\theta\right)$ 展開，就 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 分別集項求和。利用 $\sum_{k=0}^{2n}Rw^k=\sum_{k=0}^{2n}Iw^k=0$ 將 $\sum_{k=1}^{n}PA_{2k}$ 變到 $\sum_{k=0}^{n}PA_{2k+1}$。($A_{2n+1}=A_0$)

卓世傑又將此問題加以推廣，可惜他的解法不對。他在利用三角級數分別算出 $\sum_{k=0}^{n}PA_{2k+1}$ 及 $\sum_{k=1}^{n}PA_{2k}$ 之後，說當 $n\to\infty$ 時兩式相等。故得證。

這樣做法所犯的錯誤不小，以後要小心！

11102　T－集合元素個數之最大可能值

（王子俠提供）

假定 S 為一 T－集合且對所有之 T－集合 S' 均滿足 $|S|\geq|S'|$，則稱 S 為一極大 T－集合。令 $S=\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k\}$ 表一極大 T－集合，$k\geq3$，此處 $a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots<a_k$。若 a_2 與 a_3 非相鄰整數，則 $S'=S\cup\{a_2+1\}$ 顯然亦為一 T－集合，而 $|S'|=|S|+1$，此為矛盾。故 a_2 與 a_3 為相鄰整數；同理，對所有 $i=3,4,\cdots\cdots,k-1$，a_i 與 a_{i+1} 均為相鄰整數。但 a_1 與 a_2 未必相鄰。若 $a_1+2<a_2$，則 $S'=(S\sim\{a_1\})\cup\{a_1+1,a_1+2\}$ 顯然亦為一 T－集合，而 $|S'|=|S|+1$，此為矛盾。故在 a_1 與 a_2 之間最多只有一個整數。若 $a_k<n-1$，則 $a_k+2\leq n$，又 $a_1<a_2<a_3$，故 $a_3\geq a_1+2$；但 $a_1+a_2>a_k$，故 $a_2+a_3\geq a_1+a_2+2>a_k+2$。即 $S'=(S\sim\{a_1\})\cup\{a_k+1,a_k+2\}$ 亦為一 T－集合，而 $|S'|=|S|+1$，此為矛盾。故 $a_k\geq n-1$。現分兩種情形討論：

(1)所有 S 中之數均兩兩相鄰；即 $S=\{a,a+1,a+2,\cdots\cdots,a+q\}$。又分兩種情形:

(a)假定 $a+q=n-1$，則 $2a+1>n-1\Rightarrow 2a+1\geq n$；但 $2a+1>n$ 不可能，否則 $S'=S\cup\{n\}$ 亦為一 T－集合，而 $|S'|=|S|+1$，此為矛盾。故 $2a+1=n$，於是 $n=2m+1$ 為奇數，而 $a=m=\frac{n-1}{2}$。

故　$S=\left\{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2},\cdots,n-1\right\}$

而　$|S|=\frac{n+1}{2}$ ……………………①

(b)假定 $a+q=n$，則 $2a+1>n$。再分兩種情形：

ⓐ若 $n=2m$ 為偶數，則 $2a+1>n\Rightarrow 2a\geq2m\Rightarrow a\geq m$；但 $a\geq m+1$ 不可能，否則 $2a-1\geq2m+1>n\Rightarrow S'=S\cup\{a-1\}$ 亦為一 T－集合而 $|S'|=|S|+1$，此為矛盾。故 $a=m=\frac{n}{2}$。

即　$S=\left\{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1,\cdots\cdots,n\right\}$

而　$|S|=\frac{n}{2}+1$ ……………………②

ⓑ若 $n=2m+1$ 為奇數，則 $2a+1>n\Rightarrow a>m\Rightarrow a\geq m+1$；但 $a\geq m+2$ 不可能，否則 $2a-1\geq2m+3>n\Rightarrow S'=S\cup\{a-1\}$ 亦為一 T－集合，而 $|S'|=|S|+1$，此為矛盾。

故 $a=m+1=\frac{n+1}{2}$。