

本期徵答問題

11201 用鴿籠原理解數論問題

(張鎮華 提供)

原理：將 $n + 1$ 個物品放入 n 個盒子裏，最少存在一個盒子包含兩個或更多物品。

(甲)從 $1, 2, \dots, 200$ 中任選 101 個數，求證存在兩個選出來的數 x 和 y ，使得 x 整除 y 。

(乙)從 $1, 2, \dots, 2n$ 中任選 $n + 1$ 個數，求證存在兩個選出來的數 x 和 y ，使得 x 整除 y 。

(丙)從 $1, 2, \dots, 2n$ 中選出 n 個數，使得選出來的任一數不整除另一選出來的數。

(丁)從 $1, 2, \dots, 200$ 中任選 100 個數，但要求選出來的數當中最少有一個小於 16，求證存在兩個選出來的數 x 和 y ，使得 x 整除 y 。

(戊) $f(2n)$ 是滿足下列敘述的最大正整數 f ：
從 $1, 2, \dots, 2n$ 中任選 n 個數，如果選出來的數當中最少有一個小於 f ，則必可以找到兩個選出來的數 x 和 y 使得 x 整除 y ，求 $f(2n)$ 為多少？例如 $f(200) = 16$ ，請注意(丁)只證明 $f(200) \geq 16$ 。

(己) $g(m, n)$ 是滿足下列敘述的最大正整數 g ：
從 $1, 2, \dots, m$ 中任選 n 個數，如果選出來的數當中最少有一個小於 g ，則必可以找到兩個選出來的數 x 和 y 使得 x 整除 y 。
求 $f(m, n)$ 為多少？例如 $g(2n, n)$ 就是 $f(2n)$ ；由(乙)可知 $g(2n, n + 1) = \infty$ ；很容易可以證明 $g(m, 2) = 1$ ， $g(3, 3) = g(4, 3) = \infty$ ， $g(m, 3) = 1$ 當 $m \geq 3$ 時。

參考書籍

Richard A. Brualdi 著 *Introductory Combinatorics* 第二章。