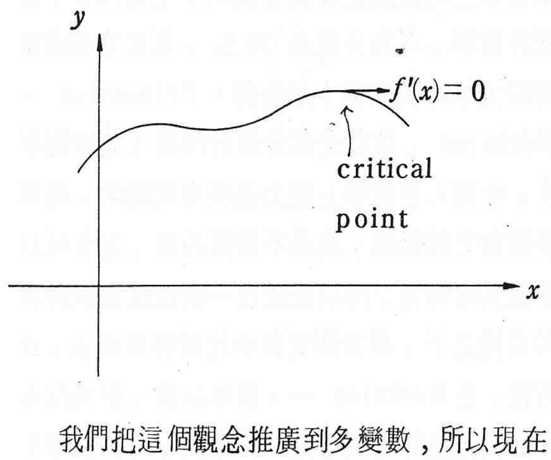
陳省身院士演講

矢量叢與示性類

時間：76年4月24日
下午3:00～4:00
地點：中央研究院
整理：本刊編輯部

矢量叢的觀念是微積分觀念自然的推廣。你們唸微積分都研究一個函數 $y=f(x)$，在平面裏頭，函數就有一個圖，假定這個函數是平滑的（smooth），利用這個函數的微分描述這函數的性質。例如說，假使在一個點，它的微分等於 0 的話，這個點就是所謂的臨界點（critical point），它是極大、極小或是反曲點（point of inflection）。



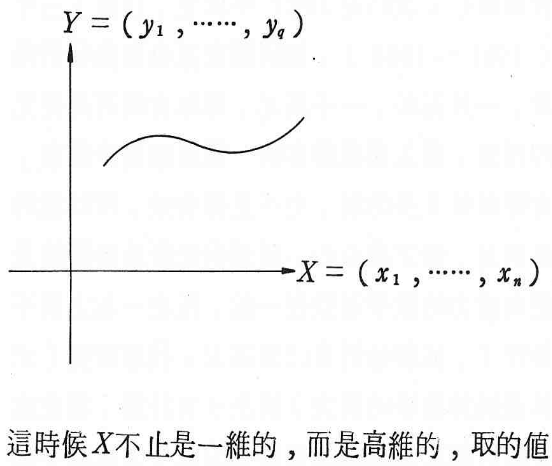
我們把這個觀念推廣到多變數，所以現在有

$$y_i=f_i(x_1,\cdots\cdots,x_n) \qquad 1\leq i\leq q$$

是 n 個變數的 q 個函數。這個推廣非常要緊，你要把微積分應用到數學或科學，不能避免的變數要增加。在這個時候，我們還是可以定微分，這時候微分 $dy_i=df_i(x_1,\cdots\cdots,x_n)$。我們喜歡把 y 看成一個矢量，y_i 是矢量的分量，因此看爲矢量的話，矢量的微分有這樣的性質

$$d\vec{y}=d\vec{f}(x_1,\cdots\cdots\cdots,x_n)$$

假使我用這樣表示的話，我也可以用同樣的圖來表示：



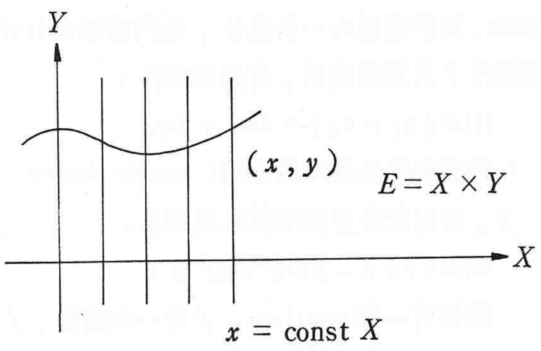
這時候 X 不止是一維的，而是高維的，取的值 Y 也是高維的。我要把這個表示方法略爲變化一下，可以把它推廣。X 是 n 維，Y 是 q 維，所以取這兩個空間的乘（product），把 X、Y 乘起來，它是 $n+q$ 維的空間 $R^{n+q}=X^n\times Y^q$。寫成這個形狀之下，我就有一個自然的映射（projection）π，它把 $X\times Y$ 映射到 X

（＊）本文未經陳省身院士過目。

，就是取它的第一個分量，即在X裏頭的分量。我們的圖，它的點可以表爲（x，$y(x)$）。所以從這個表示的時候，函數的意思是什麼呢？是一個從X到$X\times Y$的映射，使得它的第一個分量就是X自己。換句話說，我願意把它抽象化了，抽象化就推廣了，我願意把它表爲

$$\begin{array}{ll} X^n\times Y^q \ \Rightarrow\ (x,\ y(x)) & \\ \pi\downarrow\ \uparrow s & \\ X & \pi\circ s(x)=x \end{array}$$

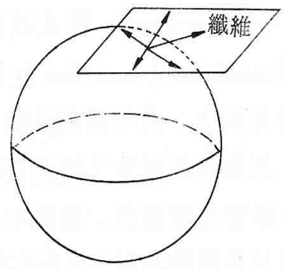
所以我把這個圖略爲改變一下子，成一個新的情形，這個新的情形立刻有一個重要的推廣，就是矢量叢（vector bundle）。



使得x的座標等於常數，這些點（x，y）頭一個座標是x。現在我們要給它名字，這些線叫做纖維（fiber），這就是在最簡單的例子之下，它是跟y軸平行的那些直線。函數變成什麼呢？變成一條在$X\times Y$裏頭的曲線跟每一個纖維相交的一點，這時整個的空間爲$X\times Y$，我把它稱爲E。近幾十年來，數學上一個重要的發展就是把這個觀念推廣，我們要整個的空間不是$X\times Y$，只是局部的是$X\times Y$的形狀，我叫E是 locally a product，是局部才是一個積，不是整個（global）積。

什麼叫局部積呢？局部積是說，X空間可以用一組鄰域（neighborhood）來覆蓋，也就是說$X=\bigcup_\alpha U_\alpha$，$X$等於$U_\alpha$這些鄰域聯集起來，兩個鄰域可以相交，它的共同點不一定是空的（empty）。locally a product 就是說：E可以用一個 projection project 到X，X稱爲底空間（base space），E不一定等於$X\times Y$，但是局部的等於$U_\alpha\times Y$，所以$E=\bigcup_\alpha(U_\alpha\times Y)$。就是說$E$這個空間是在$X$空間上頭，$X$是個底空間，整個的$E$不是$X$乘上另一個空間，但是限於一個鄰域的話，它是的。這個叫做矢量叢（vector bundle）。最簡單的一個例子是：切線叢（Tangent bundle）

如果在三維空間取一個球面，在每一點有一個切空間，這就是它的纖維。但是所有在球

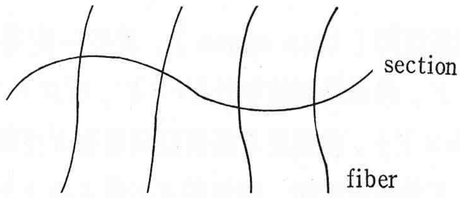


面上頭切的矢量並不等於底空間球面乘切線集，所有的 space of all tangent vectors 不一定等於底空間乘上纖維。實際上不是的。要證明這一定不是的在拓樸上頭不是最簡單的情形，需要一點觀念才能證明這樣的事實。這事實是說，所有二維球面上頭的切矢量是一個四維空間，因爲球面是二維，每一點的切矢量又是二維。但是這個四維空間不是球面乘一個平面，拓樸上講不是一個 product，需要有一點觀念才能證明。

所以總而言之，一個流形（manifold）的切叢一般情形之下不一定是一個 product，這是一個例子。

我今天要講的內容可以分成幾個題目：vector bundles; connections; curvature; chas. forms; chas. classes; Maxwell equations; Yang-Mills equations。

在座的大概很少人知道什麼是 Yang-Mills equations，這是近代物理上一個非常基本的觀念。我剛才已經講了矢量叢。所以底下要講什麼是連絡（connections）。這是一個非常基本的觀念。這個觀念非常簡單，假設我們有這樣的一個矢量叢，要討論一個 section，s



是一個 section ，section 者就是剛才所說的 X 到 E 的映射，使得 $\pi \circ s =$ identity 。畫個圖就是說一大簇纖維的一個截面，它跟每一個纖維剛好相交於一點。這個在數學上、物理上是非常基本的觀念。比方說，矢量場（ vector field ）是一個 section ，張量場（ tensor field ）也是一個 section 。現在我們的問題說，既然有這 section （ section 就是我剛才所說的函數的推廣），要用微積分的話，第一樣要會微分，怎麼樣是微分？因此要研究 section ，第一樣要怎樣微分，這個不簡單，因爲我們的空間只是個局部積，只是在局部 U_α 的鄰域上，E 這空間有座標 (x, y) ，這時我們把這 y 座標叫做 y_α ，因爲這個座標與 U_α 的選擇有關。現在我們知道 y_α 是 x 的函數，這與鄰域的選擇有關。如果換個鄰域 U_β，在這上頭的點，又有另外的座標 (x, y_β)，x 是同一點，在 U_α 和 U_β 相交的地方。把這同一點 x 看成 U_α 的點的話，它的 fiber 有 y_α 的座標。換成 U_β 的點，又有 y_β 座標。這兩組座標之間有一個關係。這矢量叢我們假定這關係是線性的。所以這座標用分量寫下來的話，叫做 y_α^i 跟 y_β^j，y_α^i 和 y_β^j 之間有一個線性關係 $y_\alpha^i(x) = \sum g_{j,\alpha\beta}^{i}(x)\, y_\beta^j(x)$, g 這個線性關係可以是 x 的函數。諸位要是對力學有經驗的話，比方說，矢量場（ vector field ），它的分量變換是線性的，它的係數就是變數變換的 Jocobian。假使是一個張量的話，它的係數的變換是 Jocabian 的一個 tensor product 。

現在把 i、j 去掉，寫成

$$y_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, y_\beta(x)$$

這樣是說，y_α，y_β 是代表一個矩陣，$g_{\alpha\beta}$ 是一個 q 階方陣，這些矩陣的元素都是 x 的函數。你看了這個方程式就知道微分不簡單了，我把 y_α 微分成 dy_α，但利用這個式子，dy_α 又等於 $g_{\alpha\beta}\, dy_\beta$ 加上 $dg_{\alpha\beta}\, y_\beta$。如果定義這個微分，就拿 y 的分量來定義微分的話，這個微分沒有你所需要的性質。換句話說，這個微分與鄰域的選擇有關，不是完全確定的。換了鄰域的話，多了挺麻煩的一項，所以定微分發生困難，因此我們就要引進一個所謂絕對微分（ absolute differentiation or covariant differentiation ）。

Covariant differentiation 現在大家叫做連絡（ connection ）。connection 就是能夠微分一個 section ，能夠求函數的微分。換句話說，假使有一個 section 的話，我要求它的微分，它是一個微分式，而它的值是個 section，對於這樣的一個微分，我們需要它有什麼條件？其實很簡單，有兩個條件：

(1) $D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2$

（因爲纖維是個矢量空間（ vector space ），所以矢量空間兩點可以相加。）

(2) $D(fs) = fDs + df \otimes s$

假使有一個 section ，f 是一個函數，$f: X \to R$ or C 。如果把 section 用函數一乘的話仍舊是個 section ，矢量空間上一點，拿數目一乘是另外一點。現在要問，假使一個 section 被函數一乘的話，應該合於什麼性質？當然啦！我們要它的導數（ derivation ）。換句話說，我們要這個東西等於 fDs ，因爲 f 是一個函數，函數的微分已經有意義了，所以加上 $df \otimes s$ ，$\otimes$ 是 tensor product 。所以一個連絡就是一個 section 的微分，適合這兩個最簡單的條件。很容易證明連絡一定存在，並且不止一個。最要緊，最簡單的一個連絡的例子就是 Levi-Civita 平行性。你要唸黎曼（ Riemann ）幾何的話，這是一個基本的觀念。

曲率（ curvature ）就是說，connection 既然很多，有一個 connection 跟另外一個 connection 不一樣，那麼怎樣描述它不一樣的地方，怎樣描寫它不同的局部性質？因爲纖維是一個 q 維的矢量空間，要描寫矢量空間最好在

每一個矢量空間裏頭取一個基底（ basis ）。所以我現在要取一個基底叫 s_i，$1 \leq i \leq q$ 。任意取一個基底之後，基底就是一個空間的座標系，有了座標系，任何一個點可以變成座標系的一個平直組合。因此我們可以把 Ds_i 表爲 $\sum_j w_i^j \otimes s_j$，$1 \leq i$，$j \leq q$，是 s_j 的平直組合。因爲 D 是個微分，所以這是個平直組合，它的係數是一次微分式。所以我把它寫成 $Ds_i = \sum_j w_i^j \otimes s_j$，$1 \leq i$，$j \leq q$ 。所以我們就有一個方陣 $w = (w_i^j)$，這是一個 $q \times q$ 的方陣，它的每一個元素都是一次微分式（ linear differential form ）。諸位如果唸過黎曼幾何的話，可以把 w_i^j 寫成 $\Gamma_{ik}^j \, dx^k$，就可以看出它的係數在黎曼空間的特別情形，就是所謂的 Christoffel symbols 。不過我們討論的情形比黎曼幾何的情形要廣得多了，因爲黎曼幾何的情形，它的纖維是切空間，現在是任意的空間。這情形是一樣的，所以這個就是 Christoffel symbols 的推廣。這個方程我把它寫爲

$$Ds = ws$$

意思就是說 s 代表一個 $1 \times q$ 的矩陣，w 是 $q \times q$ 的方陣。w 中的元素都是一次微分式，與基底的選擇有關。

當然一個基本的問題：當換基底時，w 的性質怎麼樣？這個性質非常簡單。假使現在換基底，把 s 換成 s'，s' 與 s 相差一個線性變換。對於新的基底，當然有 $Ds' = w's'$，w' 是連絡對新基底的方陣。我們現在要找 w 跟 w' 的關係。這個關係是要包含在 A，包含在換基底的線性變換 $s' = As$，只要把它微分就是。因爲連絡有兩個基本性質，對於加法和乘法適合這個基本性質，所以

$$\begin{aligned} w'As &= w's' = Ds' = D(As) \\ &= ADs + dA \cdot s \\ &= Aws + dA \cdot s \end{aligned}$$

兩邊消掉 s，立刻得到一個公式

$$w'A = Aw + dA$$

這個就是 Christoffel symbols 在座標變換下變換的方程式，原來的 Christoffel symbols 的 connection w，新的 w'（ A 是線性變換），經過 basis 這樣變換之後，它們適合這樣簡單關係。假使把這個簡單的關係寫在黎曼空間切叢之下，你就得到普通 Christoffel symbols 的變換關係，但比這複雜多了，不過是同一關係。所以這是一個很有效的推廣，我們不但把傳統的結果推廣到一個更廣的情形，並且推廣了之後，一切都更簡單，這是非常理想的情形。在一個廣義的範圍，你瞭解清楚之後，一切的關係，只有比你了解的特別情形來得簡單。

w 是 $q \times q$ 的方陣，它的元素是一次微分式，A 是一個 $q \times q$ 的方陣，它的元素是函數，所以這個方程式裏頭，A、w、w' 都是 $q \times q$ 的方陣，它的相等是表示方陣之間是這樣的一個等式。

我們搞微分幾何的人，看見一個方程式就取它的微分。在這個時候，我們取所謂的外微分（ exterior differentiation ）d，它有一個性質就是 $d^2 = 0$。外微分是把函數微分成一次式，把一次式微分成二次式，把 k 次的 differential form 微分成 $k+1$ 次，並且有 $d^2 = 0$ 的性質。這就等於說，我們把微分式看爲一個 multiple integral 的 integrand 。$d^2 = 0$ 是一個 analytic 的表示。幾何性質是說，假使有一個區域的話，取它的邊界，邊界的邊界一定等於 0 。假使有一片，它的邊界是一個圓周，圓周的邊界不再有邊界了。我們把 $w'A = Aw + dA$ 這個方程式用外微分，左邊得到

$$dw'A - \underset{\uparrow}{w'} \underset{\uparrow}{\wedge} dA$$

頭一個因子 外乘法
是一次式，
得一負號

右邊得到

$$dA\wedge w+A\,dw+\underbrace{d(dA)}_{\substack{\|\\0}}$$

又因為 $dA=w'A-Aw$

代入左右兩邊得到

$$\begin{aligned}
&dw'A-w'\wedge(w'A-Aw)\\
&=(w'A-Aw)\wedge w+Adw\\
\Rightarrow\ &dw'A-w'\wedge w'A+w'\wedge Aw\\
&=w'A\wedge w-Aw\wedge w+Adw\\
\Rightarrow\ &(dw'-w'\wedge w')A=A(dw-w\wedge w)
\end{aligned}$$

w是$q\times q$的方陣，它的元素是一次式，微分一次就是把每一個元素微分，所以 dw 的元素是二次式。$w\wedge w$呢？w是$q\times q$的方陣，元素是一次式，所以這樣一乘的話，$q\times q$方陣相乘還是$q\times q$的方陣，因為是一次式相乘的關係，它的元素也是二次式。以$\Omega=(\Omega_i^j)$代表$dw-w\wedge w$，因為Ω是一個q階方陣，它的元素是二次式，這個叫曲率（curvature）。這個是最要緊的不變式，代表連絡的局部性質，是曲率。假使在tangent bundle 的時候，把它寫出來的話，它就是Ω_i^j，但每一個元素是二次式，所以就可寫成$R^i_{i,k\ell}\,dx^k\wedge dx^\ell$。諸位要知道微分幾何的話，就知道這是普通的曲率張量。所以曲率張量應該是推廣成二次式，不要取所有四個分量。

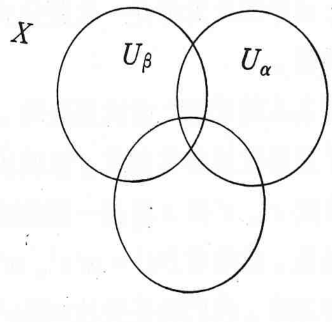
因為$\Omega'A=A\Omega$這個方程式表示曲率方陣在換基底的變換，可以寫成

$$\Omega'=A\Omega A^{-1}\qquad(\because A:\text{nonsingular})$$

因為曲率方陣在改變基底的時候有一個非常簡單的變換公式。因此我可以從曲率方陣造出一些組合（combination）來，這些組合在改換基底的時候不變。取$I+\dfrac{i}{2\pi}\Omega$的行列式（determinant）$\det(I+\dfrac{i}{2\pi}\Omega)$，這是一個$q\times q$的行列式，跟普通的不大一樣，它的元素有的是二次微分式。二次微分式很好，它的乘法是可以交換的，所以展開的話，可以完全不管它是不是二次微分式或者是普通的數量，展開的話

$$\det(I+\frac{i}{2\pi}\Omega)$$
$$=1+\underbrace{C_1(\Omega)}_{\substack{\uparrow\\ \text{這方陣的 trace}}}+\cdots\cdots+C_q(\Omega)$$

$C_1(\Omega)$的次數（degree）是2，$C_q(\Omega)$的次數是$2q$。這有什麼好處呢？因為取3行列式的話，這個東西是等於同樣的式子$\det(I+\dfrac{i}{2\pi}\Omega')$，在換基底的時候，經過這樣簡單的變換$C(\Omega)$在換基底的時候不變。所以我們有這關係就是$C_i(\Omega')=C_i(\Omega)$，$1\le i\le q$，$C_i$的次數是$2i$，它是$2i$次的微分式，它是經過基底的變換不變。這樣子的不變式有基本的意義了。這樣的不變式是大域的（global），因為你可以把你的底空間X用一個覆蓋（covering）$\{U_\alpha, U_\beta, \cdots\cdots\}$覆蓋起來，在每一個



鄰域裏頭，它的矢量叢是個積，在這裏頭你當然可以取一個基底，取一個基底的話就得到$C_i(\Omega)$。在U_β裏頭，你也取一個基底，在這兩個鄰域相交的地方，$C_i(\Omega)$跟$C_i(\Omega')$是相等的，所以$C_i(\Omega)$這些微分式在整個空間裏頭確定，它是大域的。因為其它的聯絡，或者是曲率都是跟鄰域選擇有關，但是$C_i(\Omega)$是無關的，因此在整個空間裏頭決定了，這也就是所謂的示性式（characteristic forms）。

你把它們微分可以證明是0，也就是 $dC_i(\Omega)=0$，所以這些示性式是封閉的（closed）。根據de Rham的理論，這樣子的微分式跟空間的上同調群（cohomology group）有關係。根據de Rham 的理論，$C_i(\Omega)$ 就定義了一個 cohomology class $\{C_i(\Omega)\}$，它屬於 $H^{2i}(X,Z)$。所以我們得到一個 cohomology class，或稱示性類（characteristic class）。我剛才說它與基底的選擇無關，但是可能跟連絡的選擇有關，可是定理說，這個 cohomology class與連絡的選擇也無關。所以這是個 indept of connection，它只與原來的矢量叢有關。

我剛才講到矢量叢是locally a product。我想諸位立刻想到的一個問題就是說，locally是一個product，globally是不是也是一個 product？你要證明「locally a product 不一定是 globally a product」不很簡單。現在我們得到矢量叢的 invariant。假使它是 globally product的話，很容易證明它這些 invariant 都要等於0，因此它的這些示性類與連絡選擇無關，只與矢量叢有關，它是一個 cohomology class，是一個上同調群裏頭的元素，它是矢量叢最早的大域不變式（global invariant）。

這整個故事是非常值得注意的（remarkable），你發現它的局部積不能微分，因此一定要引進連絡，它是不平坦的，它有曲率。從曲率裏頭，你作某些組合的話，就立刻得到矢量叢的大域不變式。

底下講一講在物理上的應用。你要經過很費事的一段手續之後，得到一些不變式，第一個基本問題就是不變式是不是 trivial？如果費了半天功夫得到一個不變式恆等於0，那你何苦做這些事？假定矢量叢它的纖維都是複數的矢量空間，那麼在 $q=1$ 的時候纖維都是一維的，因此這個矢量叢我們叫它線叢（line bundle）。一次的空間就是一條線，不過這是一條複線（complex line），所以實際上以實數來看是二維的。就是這個線叢在數學上（分析、幾何、……），甚至物理都是非常要緊的觀念。假使是線叢（$q=1$），剛才所有的矩陣都是 1×1 的矩陣，就是普通的元素。所以我們知道曲率 $\Omega=dw-w\wedge w$。但如果 $q=1$ 的話，$w\wedge w=0$，所以得到 $\Omega=dw$ 這個方程式。微分就等於 $d\Omega=d^2w=0$，這個就是一半的Maxwell eq.。Maxwell eq. 還有一半就是 $d*\Omega=0$，這時的底空間是個四維的 Lorentz流形。$d*\Omega=0$ 就是垂直的觀念。這兩個合在一起剛好就是Maxwell方程式。在物理學家，他們不寫 Ω，曲率，物理學家就是力（Force），所以他們寫為 F。

Yang-Mills 方程式相當於 $q=2$，很簡單的一個推廣。$q=2$ 是複數空間 C^2，我把空間的群限於 $SU(2)$ —— special unitary group in two variables。這個群的乘法不可交換，因此相對的物理論叫非交換的規範場（non-abelian gauge field）。這個方程式應該寫為

$$\begin{cases} DF=0 \\ D_A*F=0 \end{cases}$$

這就是Yang-Mills 方程式。你們可以看出來有一個不同。在 $q=1$ 的情形，我不需要連絡，因為一切東西對於實際上應用只用曲率就夠了，但是在 $q=2$ 的情形一定要用連絡，微分是對連絡微分。所以我寫成絕對微分 D_A，A 是連絡。物理學家連絡不叫 w，叫做 A。但是，Yang-Mills 方程式正式的寫法是一個方陣。所以對於一個基底把它寫出來的話成一個方陣。但是我們知道如果換基底的話，這個方陣如何的變換，就可以控制。所以跟普通的微分方程式不一樣，不是位置的函數或者位置的矢量，是一個連絡。假使你把所有的部分都寫出來的話就變成很大的一個方程組，當時楊振寧把它寫出來。他也沒有這樣子的符號，但很了不得的，他能夠寫成很複雜的方程式，就知道這些方程在座標變換的時候有很簡單的關係。

Yang-Mills 方程式最近在幾何學裏頭，在數學裏頭有重大的應用。原因是這樣子，有

一組方程式它的解就是物理上所要的規範場。把這規範場寫出來，然後與實驗來配合，看是不是與實驗符合。所以物理也好，數學也好，要解 Yang-Mills 的方程式，這很難。這是非線性方程組，並且它的解不唯一，數學家因此就研究所有解所成的空間，把所有的解放在一起成一個空間。結果這個空間非常有意思，在數學上有很多應用，最近要緊的工作是英國的數學家 S. Danalds（他只有 30 多歲，是去年得 fields 獎的人），他的結果跟其他人的結果連在一起，證明 R^4 有一個可微結構跟普通的不一樣（R^4 has an exotic differentiable structure），什麼意思呢？就是說，R^4 可以把它做成一個微分流形，這個微分流形跟普通的 R^4 不能相等，不能用一個 diffeomorphism 把它變成通常的 R^4 。我想主要的原因就是 Yang-Mills 方程式所有解所成的空間(set of solutions）成一個五維的流形，這個五維流形有很簡單的性質。這不很簡單，不過在數學上非常有意義，這些東西到現在主要應用在數學。物理比幾何複雜，所以雖然有這樣的方程式，不過據我了解跟物理實驗一時還不一定配得上。但雖然這個方程式在數學上非常有意思，非常基本，也非常自然。

四十年重遊喜看
所中生氣蓬勃
設備完善祝
前途无量
陳省身
一九八七年四月