陳省身院士演講——

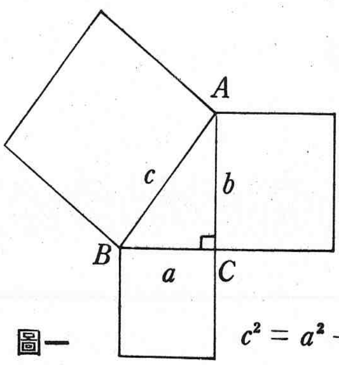
什麼是幾何學(*)

時間：76年4月21日
下午3:00～4:00
地點：國立台灣大學
整理：台大數學系林麗明

在差不多一百年前，幾何就是歐幾里得（Euclid）。他在公元前三百年左右寫了一部大書，中文叫做「幾何原本」（Elements of Geometry）。從這本書我們可以看出：在當時的社會，幾何並不被大家所注意，所以像歐幾里得這樣偉大的人，我們也不大知道他的生平。大致說起來，他是屬於365～275 B.C.年間的人物，這是大致算的時間，並不表示他活了90歲。

這本書是人類文化史上一部非常偉大、有意義的著作，它的主要結論有兩個：

㈠Pythagoras定理：有一直角三角形 ABC，則長邊的平方會等於其他兩邊的平方和。由幾何方面來說，如果我們在三邊上各作一個正方形，那麼兩個小正方形的面積和就會等於大正方形的面積。（如圖一）

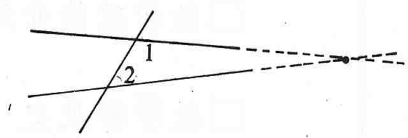


$c^2 = a^2 + b^2$

圖一

㈡三角形三內角之和等於180°，如果以弳（radian）為單位，也可以說三角形三內角之和等於 π。

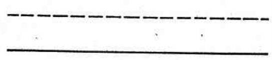
這本書在當時受到重視，不單只是為了學幾何，主要還要學一種邏輯推理的方法。歐幾里得用幾個很明顯的事實——公理（axiom），把幾何的結論從公理用邏輯的方法推出。而在他所列出的公理當中，較受爭議的是平行公理。平行公理原來是說：有兩條直線被一直線所截，如果截角的和小於180°，那麼這兩條直線在充分延長後，必相交於一點。（如圖二）



$\angle 1 + \angle 2 < 180°$

圖二

另一個簡單的說法是：假使有一直線和線外一點，那麼通過那個點就剛剛好只有一條直線和原來的直線平行，平行者就是這兩條直線不相交。（如圖三）



圖三

(*)本文未經陳省身院士過目。

這個平行公理在所有公理之中是最不明顯的，所以數學家或是對數學有興趣的人便想從其他的公理去推得平行公理。而這努力延持了幾百年，後來證明這是不可能的，於是有了非歐幾何學的發現，這在人類思想史上是非常特別、有意思的事實。因此我感覺到這是西洋數學和中國數學不同的地方。九章算經是中國古代最有名的數學書，一共九章，第九章談的是所謂勾股，勾、股就是直角三角形中較短的兩個邊，一個叫做勾，另一個就叫做股，而最長的那個個邊便稱爲弦。勾股定理也就是剛才所謂的 Pythagoras 定理，所以它的發現，中國人也應該有份。但是在中國的幾何中，我無法找到類似三角形三內角和等於 180° 的推論，這是中國數學中沒有的結果。因此，得於國外數學的經驗和有機會看中國數學的書，我覺得中國數學都偏應用；講得過份一點，甚至可以說中國數學沒有純粹數學，都是應用數學。這是中國科學的一個缺點，這個缺點到現在還存在，大家都講應用，不注意基礎科學，當然應用很要緊，但是許多科學領域基本的發現都是在基礎科學。

因爲三角形三內角之和等於180°這個結論，而有接下來的重要發展：

㈠球面幾何

所討論的三角形，不一定是要在平面上，也可以是一個球面三角形，在這個情形下，三角形三內角之和會大於 180°，並且有一個非常重要的公式：

$$A+B+C-\pi=\frac{\text{面積}}{R^2}$$

R是球的半徑，R^2則是度量球面的曲率，因此有曲率的觀念跑到這樣一個簡單的公式裏。這在數學或物理上是一個重要發展，因爲在Einstein的相對論中，曲率$=\frac{1}{R^2}$代表一個場的力，所以幾何度量和物理度量便完全一樣。

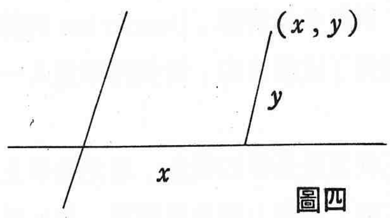
㈡非歐幾何

在這個情形下，三角形三內角之和是小於 180° 的，即有如下的重要公式：

$$A+B+C-\pi=-\frac{\text{面積}}{R^2}$$

此時R^2代表非歐幾何的一個絕對的度量，換句話說在非歐幾何的平面上，它的曲率是負的，即曲率$=-\frac{1}{R^2}$。因此，在空間或者平面的曲率，可以是正的，像球面幾何，也可以是負的，像非歐幾何，而其相對應的三角形內三內角和，也分別有大於或小於 180° 之情形，不再滿足歐幾里得的平行公理。

歐幾里得幾何之後，第二個重要的發展是座標幾何。這是法國的哲學家、數學家 René Descartes（1596～1650），對於研究幾何，引進了座標的概念，因此可用解析的方法來處理幾何的問題。座標就是說：假使在 $x-y$ 平面上，有兩個軸，x 軸和 y 軸，那麼一個點的兩個 x、y 座標，就分別以如圖四中的兩個相對應的度量來表示。因此幾何的討論可用



圖四

解析的方法，即：

點 $\rightarrow$ (x, y)

直線 $\rightarrow$ $ax+by+c=0$

圓周 $\rightarrow$ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

圓心：(a, b)

半徑$=r$

於是幾何的問題便成爲代數的問題。

這樣的發展不但使幾何問題的處理容易些，更有其重大的意義：

㈠解析之後，使可研究的圖形的範圍擴大，除了直線的一次方程式，或者圓周的二次方程式，我們還可以取任意的方程式$f(x, y)=0$，討論所有點它的座標(x, y)適合這

樣方程式的軌跡。因此許多用幾何的方法很難處理的曲線，在解析化之後，都可從表示它的方程式中得到有關的幾何性質。

(二)研究的圖形不再局限在二維的平面上，可推廣至高維的空間。世界上的事情，如果只用二維的平面，往往不足以表示，需要取更多的座標。例如我們所在的空間是三維，有 x、y、z 三個度量，假使要用幾何來表示物理的問題，那麼三個度量之外，尚須加一個時間 t，所以物理的空間就變成了四維的空間；不但如此，假使有一點在三維空間運動，那麼除了須要 (x,y,z) 來表示點的位置，還須要這三座標對時間的微分（derivative）來表示它的速率，即（$\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$），這就成了六維的空間。所以種種的情形都指示我們有必要考慮更高維的空間，來表示自然的現象。

解析幾何把幾何研究的範圍大大地擴大了，而科學發展的基本現象，就是要擴大研究的範圍、了解更多的情形，Descartes 的解析幾何，便達到了這個目的，使幾何學邁入一個新的階段。

第三個發展是群的觀念，這是數學上一個基本的結構。數學上總是要運算，加、減、乘、除，研究幾何的話，把這個東西從這個位置移動到其他的位置，也是個運算。而這樣的運算，也稱爲運動，有一個特別的性質，也就是說：把一個物體從甲地移到乙地，再移到丙地，可直接把物體從甲地移到丙地，即兩個運動的結果，可經由一次運動來達成，具有這個特殊性質的，便稱其成一群。研究幾何的對象，應是研究幾何的性質，經運動群後是不變的。這個觀念立刻便有了重要的發展。

既然討論運動群，有時我們還想討論更大的群，看是不是有些性質不但在運動群下不變，在更大的群之下也是不變。歷史上最主要的例子是投影。假使兩條直線在空間中相交，從一點投影，被一新平面所截，則所得之二直線仍舊是相交。像這種「直線相交」的幾何性質，經過一種比運動還廣的投影之後，所得的圖形仍具有如此的幾何性質，即在投影下不變。這也有許多應用，如藝術家畫畫，講求透視，遠近合乎幾何的條件。

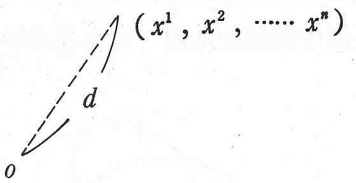
研究幾何性質在投影群之下不變的是所謂投影幾何。投影幾何的發展，把幾何的觀念推廣了，不只是有普通的歐幾里得幾何討論幾何性質經運動群後不變的，也可以討論投影幾何中，投影後仍是不變的性質。有許多經運動群後不變的性質，在投影變換後是變了的，像距離、角度，但是還有些更重要的性質在大一點如投影下是不變的，而這些性質能經過投影群不變，在幾何上自有其重要的意義。

法國的數學家Poncelet（1788～1867），在投影幾何發展史上是一個主要的人物。他曾追隨拿破崙攻打俄國，被俄俘擄，囚禁在俄之監獄中，講他的主要著作，也就是在此時完成的。因此，大家常常抱怨科學研究的設備不好，相形之下，這個例子可以證明這不是科學研究最主要的問題——當然這情形非常例外。

在幾何學的發展之中，有許許多多幾何學，像歐幾里得幾何學、投影幾何學……及其他種種幾何學，自然就要有一個人把它綜合集結起來，那就是德國的數學家 Felix Klein（1849～1925）。他在二十二歲的時候前往德國小城 Erlanger 的一所大學任教，依據德國的習慣，新教授上任必須做一次公開講演，而他講演的內容——Erlanger program，就是這個新幾何學。他把幾何學建立在群的觀念上：一個空間有一個變換群，允許把空間的圖形從這個位置移到另一個位置，因此有了一個群之後，便有一種幾何，研究所有圖形的幾何性質經過這個變換群不變的。這個群可以是歐幾里得運動群，也可以是投影變換群，或者其他種種的群，因爲群的選擇不同，也就得到許多種不同的幾何學。其中包括非歐幾何學，在Klein 的觀點，非歐幾何學只要在空間中有一個所謂二次的超曲面，討論在所有的投影變換下，使這

個二次超曲面不變的。例如：在平面上有一個圓周，非歐幾何就是要討論在投影變換群下圓周仍不改變的性質。所以非歐幾何就變成研究球內點所構成的空間的性質，也就是在雙曲平面（hyperbolic plane）上討論。因此由Klein的觀點，非歐幾何學就變得極易處理。

在這個階段之前，還有黎曼（Riemann）幾何的發展，這是Descartes座標幾何的自然推廣。在Descartes座標系中，如果我們取m維的空間，一個點就可以用m個座標（x^1，x^2，……x^m）來表示，而此點到原點（origan）的距離如果是d，那麼就有$d^2 = \Sigma g_{ik} x^i x^k$。（如圖五）即這個點到原點距離的平方，是



圖五　$d^2 = \Sigma g_{ik} x^i x^k$

座標的一個二次式。而Riemann不但用座標，他還用座標的微分，於是便把Descartes幾何局部化，因此Riemann幾何可說是一個局部化的幾何。Riemann幾何主要建構在弧長s上，弧長微分的平方會等於座標的一個二次微分式，即$ds^2 = \Sigma g_{ik} dx^i dx^k$；用弧長即可建立一個幾何，因爲既然有了$ds$，便可計算兩點所連接的曲線的長度，也就是弧長。「測地線」（geodesic）是指在兩點間使弧長最短的那條曲線，它是平面上直線的推廣，有了測地線便可以有面積及其他種種觀念。

Riemann幾何最初在二維的情形是Gauss（1777～1854）發展的，他在1827年寫了一本差不多五十頁的小册子，研究在二維即曲面的情形及在這樣的ds^2之下，所能夠發展的幾何性質，他的目的是爲了應用，因爲當時的德國政府要他主持一個測量工作，爲了給這個測量工作一個理論基礎，於是Gauss寫下了這篇在微分幾何上最要緊的論文，微分幾何自此誕生。以前關於把微積分用在幾何上的問題，只能說是微積分在幾何學上的應用，在Gauss這篇文章之後，微分幾何便成了一門獨立的學問，就是從ds^2得到一切的幾何性質。

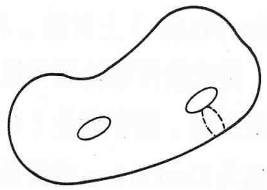
Riemann（1826～1866）在1854年，在爲取得大學教授資格的公開演講上，發表了Riemann幾何的第一篇論文。Riemann幾何並不像其他我們所談的歐幾里得幾何，或者Felix klein的Erlanger program幾何，或者是投影幾何，需要整個的空間，在Riemann幾何的情形下，我們只需要空間的一部分，因爲ds^2有意義，我們便可量弧長、面積、角度……等幾何性質，不需要知道全部的空間，也就是說，在這樣的一個小塊裏，便可發展全部的幾何性質，這是Riemann幾何革命性的觀念，使幾何局部化，這個和物理上的場論是完全符合的。

眞正使Riemann幾何受到重視的是Einstein的廣義相對論。大致說起來，Einstein的廣義相對論是要把物理幾何化，也就是說把物理的性質變爲幾何的性質，因此Riemann幾何就成爲物理學家一定要唸的一門數學。到了Riemann空間一樣有曲率的概念，只是因爲Riemann空間是高維的，所以它的曲率概念就變得相當複雜。在Einstein的廣義相對論中的基本公式裏，大致說起來，物理的力是一個曲率；數學家講曲率和物理學家講力、potential、velocity，是完全可以把它們連在一起的。

在Riemann幾何中，Levi-Civita平行性是一個重要的觀念。Levi-Civita以爲在Riemann幾何，或者是廣義相對論裏的勞倫茲幾何，都有一個很基本的性質，那就是平行性；在這個時候，空間不再是只用一個座標系表示的空間，而是需要很多不同的座標系才能表現的「流形」（manifold），這樣又把幾何研究的空間推廣了。所以我常有個比喻，如果我們把幾何空間的推廣和人類穿衣服的過程相對照，那麼一開始的歐幾里得幾何，便好比人在原始社會中沒有穿衣服，是裸體的；然後Descartes把座標的概念加入了「赤裸」的空間，就好比人類開始穿衣服；而到了流形的階段，就好比現代人，不只穿一件衣服，還要常常換。也許有些人不太能接受這樣「奇裝異服」式的換座標，但是沒有關係，Einstein也花了七年的時間，才終於接受座標可以轉換的概念，而能從特殊相對論進展到廣義相對論，空間中有不同的座標系，那麼麻煩就來了，因為幾何的性質是和座標系的選取有關，不過不要緊，只要我們能控制座標變換的性質，使在變換前即有的性質，經過變換之後仍為我們所控制，那麼換座標就沒關係了，這是近代幾何學比較困難的地方。

用以表示流形的座標系是任意的，因此可能是非線性的座標，這在處理上就變得比較困難；但是我們可以取線性的空間去逼近流形，換句話說，雖然流形本身是非線性的，但在流形上的一點，都有一個和普通空間一樣的線性空間，即切空間。這些切空間之間原本是沒有關係的，而Levi-Civita平行性就是要建立二點之間的切空間的關係；之後，微分幾何學家發現，這個平行性是非常基本的性質。又因為拓撲（topology）學的發展，我們把這個觀念推廣了，不一定要談切空間，任意一個空間都可以，於是就有矢量叢（vector bundles）和聯絡（connections）的觀念，也就是說流形的切空間差不多是平的，但是矢量叢却可以是一個豎起來的空間，任何的矢量空間都可以，這是今天在幾何上大家所公認的一個基本結構，從Riemann幾何推廣到有聯絡的矢量叢，這也就是物理上規範場論（gauge field）的數學基礎。

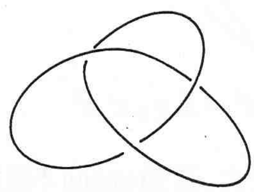
Riemann幾何把幾何局部化，但我們不能永遠只在一個小區域裏頭，所以局部化之後又要整體化，又要把它擴充到全空間。而在這個整體化的擴充當中，最要緊的就是拓撲學（topology）。（即俞大維先生說的「橡皮幾何學」），只要我們不把一個圖形扯破，那麼就有些幾何性質雖經過放大、縮小……等很大的變換，也不會改變，例如虧格（genus）的性質，比方說我們在一個二次的曲面上挖兩個洞（如圖六），那麼它的虧格就等於2，也可以



$g = 2$

圖六

等於3、4……，或者像美國的甜甜圈只有一個洞，虧格就是1，即虧格等於洞的個數，這個數目是把曲面放大縮小之後仍舊不變的，這是拓撲不變式的一個例子。另外還有一個例子是有關於結（knot），如圖七，這是一個三維空間中封閉的曲線，沒有辦法把它解開成一圓



（trifold）

圖七

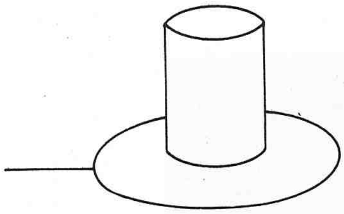
周，即所謂結。不要把這想成幾何學家沒有事在玩的東西，在應用上，這有非常重要的意義。

剛才說過，物理上的空間是四維的，如果再加上電磁場，就成了五維的空間。在Maxwell方程中，底空間是一個四維的流形，在那上頭的每一點都突出去一條一維的空間（矢量叢），這一維的空間，在物理上必須是封閉的，所以是一個圓周，數學家稱此為圓周叢（circle bundles）；也就是說，底空間是四維，每一點又有一個圓周，所以整個空間就是五維的，但是這並不是一個任意的五維空間，它必須滿足這樣特別的一個幾何結構。利用這個觀念，Maxwell方程就可寫成下面這樣簡單的形式：

$$\delta F = J \ , \ dF = 0$$

其中 F 是這個圓周叢的一個聯絡的曲率，這曲率是一個二次微分式，d 是代表此微分式的外微分，$dF=0$ 就是說這個二次微分式是封閉的。另外一個方程式是 δ，$\delta=*d*$ 即所謂餘微分（Codifferential）。在一般的電磁學書上，是用一組方程來表現Maxwell方程，現在由於數學或幾何的發展，不但把一組方程式簡化，而且可由這化簡的方程式去推得數學、幾何、物理上的結論，並不一定要回來把方程式全展開才可獲得相同的結論，所以這觀念上的發展，的確使得科學進步。如果大家有興趣，可試著去證明這組方程和平常我們所見的Maxwell 方程是一樣的。

在物理上有一個Boehm-Ahanorow實驗，就是說：普通把Maxwell方程寫成那樣的形式是不對的，因為它沒有把所有的電磁現象都表示出來，應該利用圓周叢聯絡 A，$dA=F$ 才是描寫所有電磁現象的方程式，$dF=0$ 只是 $dA=F$ 的一種結果。Boehm-Ahanorow experiment 是如圖八的裝置，有一個內有磁場的圓筒，外面沒有磁場，而在圓筒的外圍接有



圖八

線圈，那麼圓筒內的磁場，便和通電之路徑有關，楊振寧先生有一篇文章把這情形說得很清楚。總而言之，就是應該把 Maxwell 方程寫成：

$$dA=F\text{ , }\delta F=J$$

的形式（也就是楊—Mills 方程式），用以處理更複雜的實驗，也才能眞正代表所有電磁現象，除此之外，楊—Mills 方程式是一切場論的基礎，是規範現論的基本方程式，它的重要性就如同Maxwell 方程在電磁場或 Einstein 方程在引力場的重要性。不過在這個情形下，矢量叢就變成二維而不是一維了，那麼作用在這個二維矢量叢上的群就不再是可交換，因此數學上的處理就變得很複雜了。

最後談談 James White 的公式，這在分子生物學，DNA方面是一個基本公式。DNA在幾何上的結構是雙螺蝦，是兩條封閉的曲線互相繞著，所以很自然的，研究 DNA 幾何結構的基礎是很簡單的微分幾何的曲線理論，和剛剛談的結有關，即打了一個結，結的數學性質就對應到 DNA 的生物反應，這方面的實驗，目前王倬教授正在南港從事。DNA分子雖是一個螺線，却不像我們所想像的，它的螺線是以最經濟的方式互相纏繞，而產生了許多複雜而有意思的幾何問題；之中有一個就是White 的公式：$Lk=T_W+W$ 兩個封閉曲線套起來的話有一個套數 Lk，它會等於 twist 和 Writhing-number 之和。套的數目可以很大很大，分子生物的現象，不僅是可以使它套起來，也可以使它解開，恢復原來的形狀。總而言之，我不懂這些生物學，只是道聽塗說。

大家覺得微分幾何應該是很有用的，因為在物理學發展之中，電磁學對人類日常生活是最有影響的；而在遺傳工程及其他方面，DNA的結構也是生物科學對人類生活最有影響的一門學問。很巧，我剛好就是研究這兩門學問的數學基礎：微分幾何。這讓我聯想到一個有名的理論物理學家 E. Wigner 所寫的一篇文章：The Unreasonable Effectiveness of Math.，為什麼數學會有用？光玩玩 Genus 、結竟也能找到有用的數學性質，提供了很好的應用，他覺得很不可思議。在這篇文章的開頭，他舉了一個更簡單的例子：有兩個中學同學，畢業後各奔前程，若干年後，兩個人再度碰面，甲便問乙近幾年在研究什麼？乙說他在研究人口問題，甲便欣賞了一下乙的論文，發現論文裏頭總有個 π。我們都知道 π 是圓周率，怎麼可以和人口問題發生關係？這也是一個最粗淺的例子，告訴我們：基本的發現，有時候也不一定要求立刻的應用，可能結果有更大的應用。