教與學

—這樣教？那樣教？

葉東進

一、談龔文說教材

數季第十卷三期載有龔啓雄先生所撰之「基礎數學統合讀後感」一文，談及新編高中教科書基礎數學統合上册第一章「向量的分解與應用」，提出教材中某些問題的處理爲什麼要那樣而不要這樣？

所謂解法簡單，「簡單」這兩個字是多少含有主觀成分的，我們熟悉的事物或方法對自己來說總是感覺比較簡單。課堂上老師的口頭禪：這個非常簡單！我們瞭解那是老師對自己說的。同樣，當聽人說這道問題的解法這樣子比較簡單時，也應作如是觀。

對於個人來說，自己想用什麼方法解題，純粹是個人的喜好，沒什麼話說，但是教科書負有啓導的作用，就必須愼思而明辨。雖然「簡單」這個觀念兼具主觀，但多少也有一些普通的共識成分，其中之一便是系統化。比如算術裡的雞兎、流水、行程、和差、年齡等問題，系統化的解法便是經由一次方程來處理；平面幾何裡的許多須賴作輔助線才能解的問題，系統化的解法便是經由座標（或向量）幾何來處理；三角裡的許多恒等式可由尤拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的運用而作一般系統性的證明。以上說的例子是就較大的層面來說，若是從較小範圍的題材來看，系統性的處理常可免掉解題沒有靈感的缺憾而呈現較清晰明白的思路。就以統合教材裡面「向量的分解與應用」這部分題材來說，它所揭櫫的一個系統性處理的方法是緣於下面這件基本事實：

如果 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 是不平行的兩個非零向量，則由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 所張之平面上的任何向量 $\overrightarrow{OP}$ 均可唯一的表爲 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合，即對應於點 P，存在唯一的一對實數（x，y）使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。另外，$P$，$A$，$B$ 三點共線的充分必要條件是 $x+y=1$。

以上面的基本事實爲基礎作有關諸點共線的問題的處理正是統合教材所走的方式，這種方式值得讚賞鼓勵是因爲它使有些問題的處理，表面看來雖然呈現較複雜的樣式，骨子裡卻是脈絡可尋明明白白。就以幾何裡的西瓦（Ceva）定理及孟氏（Menelaus）定理爲例：

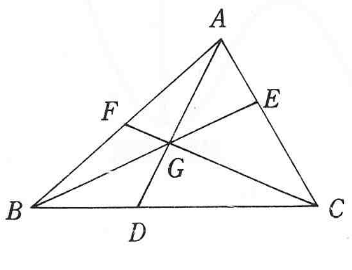
西瓦定理：

設 D，E，F 分別是 $\triangle ABC$ 的邊 BC，CA，AB 上的分點，滿足

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=a\,,\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=b\,,\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=c\ ，則$$

線段 AD，BE，CF 共點的充分必要條件是 $abc=1$

證明：令 AD，BE 交於點 G 及 $\overrightarrow{CG}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$



$\Rightarrow \overrightarrow{CG} = x\overrightarrow{CA} + y(a+1)\overrightarrow{CD}$

$\left(= x\left(\frac{b+1}{b}\right)\overrightarrow{CE} + y\overrightarrow{CB}\right)$

由 A，G，D 共線（E，G，B 共線）

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y(a+1) = 1 \\ \left(1+\frac{1}{b}\right)x + y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x = \frac{ab}{ab+a+1}, \quad y = \frac{1}{ab+a+1}$$

顯然，線段 AD, BE, CF 共點 $\Leftrightarrow C,G,F$ 三點共線

$\Leftrightarrow \exists 1\ \lambda \neq 0$ 使

$$\overrightarrow{CF}\left(=\frac{1}{C+1}\overrightarrow{CA}+\frac{C}{C+1}\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\lambda CG\left(=\frac{\lambda ab}{ab+a+1}\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{ab+a+1}\overrightarrow{CB}\right)$$

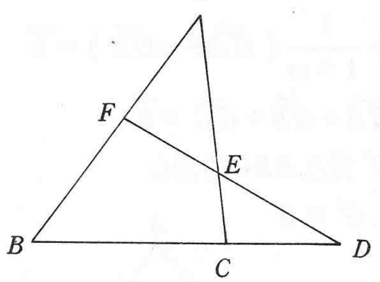
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda ab}{ab+a+1} = \dfrac{1}{c+1} \\ \dfrac{\lambda}{ab+a+1} = \dfrac{c}{c+1} \end{cases} \quad \text{即 } abc=1$$

孟氏定理：設 D，E，F 分別是 $\triangle ABC$ 的邊 BC，CA，AB 上的分點，滿足

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = a, \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = b, \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = c，則$$

D，E，F 三點共線的充分必要條件是 $abc=1$。

證明：



由 $\overrightarrow{BE} = \frac{b}{b+1}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{b+1}\overrightarrow{BC}$

$$=\frac{b}{b+1}(c+1)\overrightarrow{BF}+\frac{1}{b+1}\left(\frac{a-1}{a}\right)\overrightarrow{BD}$$

顯然，D，E，F 三點共線 $\Leftrightarrow$

$$\frac{b}{b+1}(c+1)+\frac{1}{b+1}\left(\frac{a-1}{a}\right)=1,$$

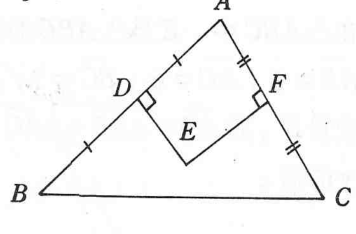
即 $abc=1$。

因此從統合教材所走的方式再看龔文中所提供的處理方式，站在教學的立場，我倒是比較傾向教材的方式。前面說過，我們熟悉的事物或方法對自己來說總是感覺比較簡單。如果以我們熟悉的某些已知的幾何性質去處理幾何問題，當然沒話說，但是當我們的教學題材是侷限於向量幾何，而教學的目標是教導學生學習如何用向量這個工具去處理幾何問題時，過度的使用已知幾何性質便可能迷失教學的目標，而龔文所提多少有此缺失。但是統合教材寫的也並非盡如人意，比如第 6 頁例 5 的處理方式就令人倒胃口，它使用了過度的已知幾何性質，像是兩個三角形若具有相等的高，則它們的面積比等於它們的對應底的比；一圓弧所對之圓心角是該弧所對之圓周角的二倍。這些性質本身的內涵是很簡單，問題不在此，就是不說這些性質不便用，光是想到何時要用及這些性質所需的靈感，就讓人懷疑這種方式的教學價值。其實比較合理的一個安排是先處理第 8 頁的例 6，以例 6 的結論作根據，再配以前述所指之基本事實來解例 5，這樣的安排使得處理過程中的每一步驟顯得自然而不唐突。現在敍述如下：

例 6：在 $\triangle ABC$ 中，E 爲 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，設 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x，y 的值。

先作分析：

表式 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 中有二個未知數 x，y 待定，因此需要二個有關 x，y 的方程式以解出 x 與 y。



由於數對 (x,y) 是唯一對應於點 E，於是便想：E 是由那兩個獨立條件所決定？顯然是來自線段 AB 與 AC 的垂直平分線。所以應該設法把向量 $\overrightarrow{AE}$ 轉換成與 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{FE}$ 這些有關的對象上，並利用 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{DE}$ 垂直(及 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{FE}$ 垂直)其內積爲零這件事實來造出兩個有關 x 與 y 的方程式。

解： $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}$

(及 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FE}$)

$\Rightarrow x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}$

(及 $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FE}$)

$\Rightarrow(x-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$

(及 $x\overrightarrow{AB}+(y-\frac{1}{2})\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FE}$)

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ (及 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FE}=0$)

$\Rightarrow(x-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

(及 $x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(y-\frac{1}{2})\overrightarrow{AC}^2=0$)

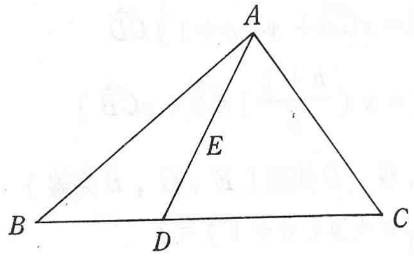
但是 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$

$=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=\dfrac{51}{2}$

$$\therefore\begin{cases}64(x-\frac{1}{2})+\frac{51}{2}y=0\\ \frac{51}{2}x+36(y-\frac{1}{2})=0\end{cases}$$

得 $x=\dfrac{44}{105}$，$y=\dfrac{64}{315}$。

例5：在 $\triangle ABC$ 中，E 爲 $\triangle ABC$ 的外心，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，AE，BC 交於 D，設 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x，y 的值。



解： 令 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AE}$

由例6，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{44}{105}\overrightarrow{AB}+\dfrac{64}{315}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\overrightarrow{AD}=\dfrac{44t}{105}\overrightarrow{AB}+\dfrac{64t}{315}\overrightarrow{AC}$

但是 B，D，C 三點共線

$\therefore\dfrac{44t}{105}+\dfrac{64t}{315}=1$，即 $t=\dfrac{315}{196}$

故 $x=\dfrac{44t}{105}=\dfrac{132}{196}$

$y=\dfrac{64t}{315}=\dfrac{64}{196}$。

另外，第16頁例4(註)所列的證明方式也不可取。既然三角形 ABC 的重心 G 的特性：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 已在教材的前面提過，並且爲一般學生所知悉，用它來解題應該是最容易被考慮到的：

$\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}=\vec{0}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{1+m}(\overrightarrow{G'B}+m\overrightarrow{G'C})$

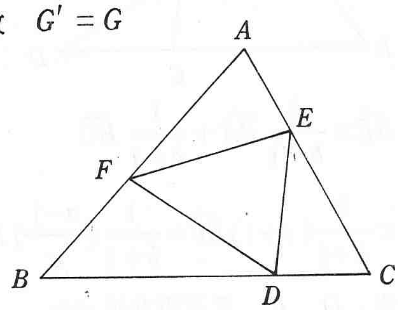
$+\dfrac{1}{1+m}(\overrightarrow{G'C}+m\overrightarrow{G'A})$

$+\dfrac{1}{1+m}(\overrightarrow{G'A}+m\overrightarrow{G'B})=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$

$\Rightarrow G'$ 是 $\triangle ABC$ 的重心

故 $G'=G$



註：例 4：

設$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=m$

若G，G'分別是$\triangle ABC$，$\triangle DEF$的重心

則　$G'=G$。

二、餘弦定理這樣教那樣教

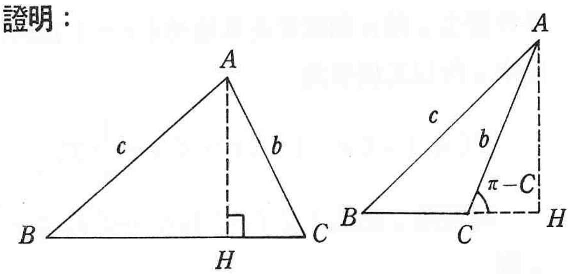
一位同事向我提說：教學上，如果先介紹投影定理，再利用它的結論來證明餘弦定理會比較簡單。

他的意思是先證明下列定理：

在$\triangle ABC$中，有

$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B & (1)\\ b=c\cos A+a\cos C & (2)\quad (*)\\ c=a\cos B+b\cos A & (3)\end{cases}$$

證明：



由$a=\overline{BH}+\overline{HC}$（或$a=\overline{BH}-\overline{HC}$）

$\Rightarrow a=c\cos B+b\cos C$

（或$a=c\cos B-b\cos(\pi-C)$

$=c\cos B+b\cos C$）

同理可得

$b=c\cos A+a\cos C$

$c=a\cos B+b\cos A$

次證餘弦定理：

在$\triangle ABC$中，有

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$$

證明：由上面定理中的式(*)：

$$\begin{cases} (-a)\times(1)+b\times(2)+c\times(3)\\ a\times(1)+(-b)\times(2)+c\times(3)\\ a\times(1)+b\times(2)+(-c)\times(3)\end{cases}$$

依次可得

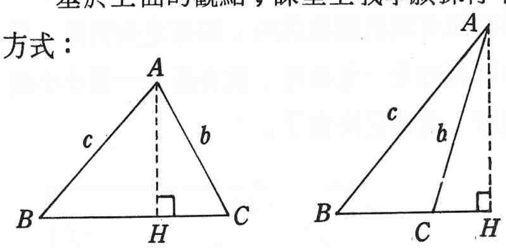
$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$$

如果僅是爲了證明餘弦定理而證明，這種方式沒話可說，但是站在教學的立場，我不太欣賞，理由是：

(1)爲了餘弦定理的證明；事前要先證明投影定理，但是投影定理的出現在餘弦定理的證明過程中是一種唐突。

(2)表面看來簡單的事物不一定眞是簡單：表面看來複雜的事物不一定眞是複雜。自然順暢而且秉具以簡御繁便可說是簡單，條理系統而且脈絡可尋便可說是簡單。

基於上面的觀點，課堂上我寧願採行下列方式：



令$\overline{AH}=x$，$\overline{BH}=y$

$\therefore \overline{CH}=|a-y|$

由$\begin{cases} c^2=x^2+y^2\\ b^2=x^2+|a-y|^2\end{cases}$

$\Rightarrow b^2=a^2+c^2-2ay$

但是　$y=c\cos B$

故　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

上面的證明顯示出自然順暢，以簡御繁的式樣，因爲它利用直角三角形的三邊關係這個最簡單的性質來引出一般三角形的三邊關係；它也是條理系統，脈絡可尋，因爲爲了利用直角三角形的三邊關係而設定x與y這樣的未知數是順理應勢，毫不做作。

——本文作者任敎於新竹科學園區實驗高中—