由三次函數的圖形探討三次方程式根的性質

李勝利

給定一三次函數

$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$

則 $g'(x)=3x^2+2ax+b$

$g''(x)=6x+2a=6(x-(-\frac{a}{3}))$

反曲點在 $x=-\frac{a}{3}$

利用綜合除法將 $g(x)$ 表成 $x+\frac{a}{3}$ 的多項式，

得 $g(x)=(x+\frac{a}{3})^3+(-\frac{1}{3}a^2+b)(x+\frac{a}{3})+(\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c)$

而 $g(x-\frac{a}{3})=x^3+(-\frac{1}{3}a^2+b)x+\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$

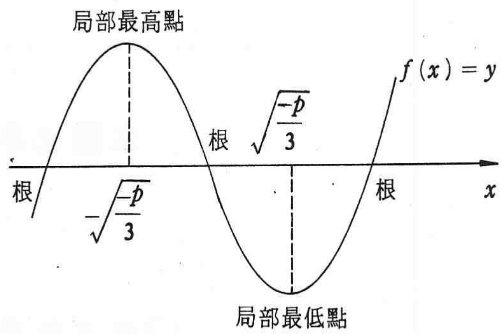
上式即將 $g(x)$ 的圖形做左右平移（$a>0$ 時，右移 $\frac{a}{3}$ 單位；$a<0$ 時左移 $\frac{|a|}{3}$ 單位），使其反曲點落在 y 軸上，則所得的新的三次函數不含 x^2 項，又因爲圖形只是做左右平移，故不影響根的性質，因此我們可就三次函數

$$f(x)=x^3+px+q$$

加以討論即可

(一)當 $f(x)=x^3+px+q=0$ 有三個不等的實根時，

$y=f(x)$ 的圖形如下：



此時 $f'(x)=3x^2+p$

$$=3(x-(-\sqrt{\frac{-p}{3}}))(x-(\sqrt{\frac{-p}{3}}))$$

$p<0$

由圖形知函數 $f(x)$ 之極大值與極小值之正負號相反，即

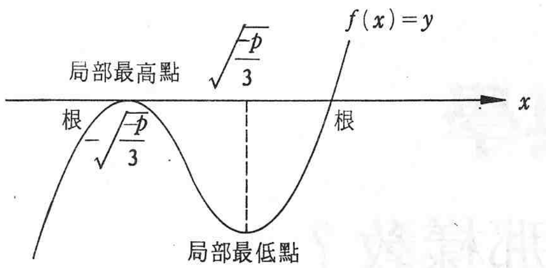
$$f(\sqrt{\frac{-p}{3}})f(-\sqrt{\frac{-p}{3}})<0$$

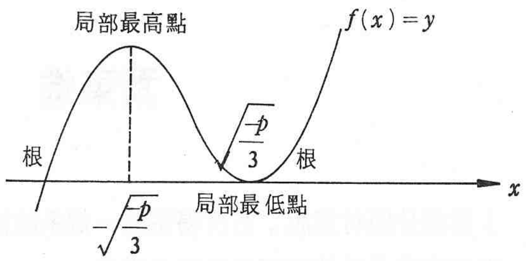
整理之得 $4p^3+27q^2<0$

令 $D=-4p^3-27q^2$ 得 $D>0$

(二)當 $f(x)=x^3+px+q=0$ 至少有兩個相同的實根時，可分成兩種情形討論：

(1) $f(x)=0$ 有兩個相同的實根及另一不同的實根時，圖形如下：





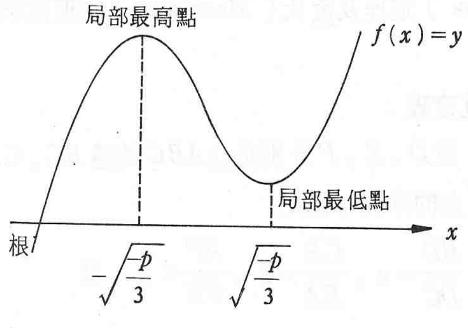
由圖形可知函數 $f(x)$ 之極大值或極小值有一爲0

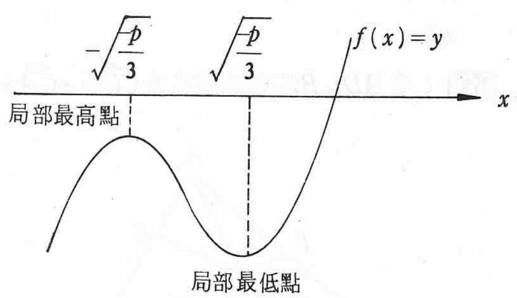
即 $f(\sqrt{\frac{-p}{3}})\,f(-\sqrt{\frac{-p}{3}})=0$　得 $D=0$

(2) $f(x)=0$ 有三個相等實根時，對應之函數必爲 $f(x)=x^3$，此時 $p=q=0$，故得 $D=0$。

(三)當 $f(x)=x^3+px+q=0$ 有一實根及兩虛根時，可分成三種情形討論：

(1)圖形如下時：

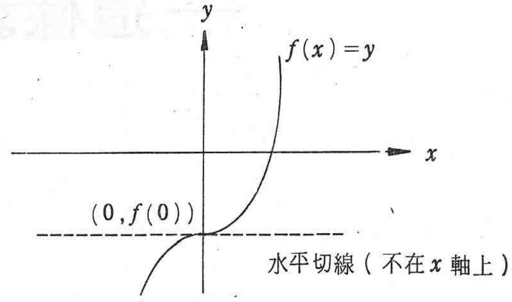




由圖形知函數 $f(x)$ 之極大值與極小值必爲同號，即

$$f(\sqrt{\frac{-p}{3}})\,f(-\sqrt{\frac{-p}{3}})>0 \quad \text{得}D<0$$

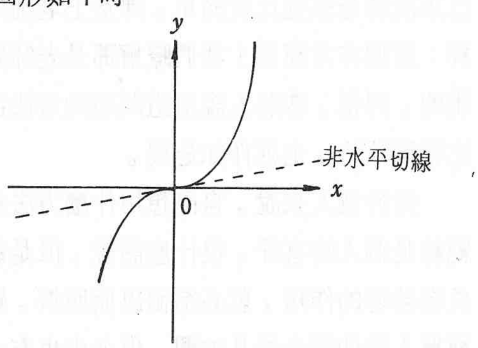
(2)圖形如下時



因函數 $f(x)$ 在反曲點 $(0,f(0))$ 處有一水平切線，故 $f'(x)=3x^2+p=0$ 有二相等實根，則判別式爲0，即 $-4\cdot3\cdot p=0$，得 $p=0$，但函數 $f(x)$ 之水平切線不在 x 軸上，故 $f''(x)=0$ 之根 $x=0$ 必不爲 $f(x)=0$ 之根，即 $f(0)\neq0$，得　$q\neq0$，故

$$D=-4p^3-27q^2=-27q^2<0$$

(3)圖形如下時



因函數 $f(x)$ 在反曲點 $(0,0)$ 處有一非水平切線，則 $f'(x)=3x^2+p=0$ 之根的判別式小於0，即 $-4\cdot3\cdot p<0$，則 $p>0$，故

$$D=-4p^3-27q^2<0$$

由上面的討論，我們歸納如下：

給定一個三次方程式 $f(x)=x^3+pq+q=0$，令 $D=-4p^3-27q^2$，則

(1)若 $D>0$，則方程式有三相異實數，

(2)若 $D=0$，則方程式至少有兩相同實根，

(3)若 $D<0$，則方程式有一實根及兩虛根。