

10402 集合問題(張鎮華提供)

假設 $n \geq 2$ 且 $n-1 \leq k \leq \binom{n}{2}$, 則存在

S 使得 $d(S) = k$ 。

證： $n=2$ 時顯然成立。假設 n 時成立，

考慮 $n+1$ 的情況。對 $n \leq k \leq \binom{n+1}{2}$

，恒有 $0 \leq k-n \leq \frac{(n+1)n}{2} - n =$

$\binom{n}{2}$ 。

(1) 當 $n-1 > k-n$ 時，也就是 $2n-1 > k \geq n$ 。考慮 $x_1=1, x_2=2, \dots, x_n=n, x_{n+1}=k+1$ ，則 $d(S) = k$ 。

(2) 當 $n-1 \leq k-n \leq \binom{n}{2}$ 時。由歸納法假設後，存在 $S' = \{x_1 < \dots < x_n\}$ 使得 $d(S') = k-n$ 。選取夠大的 x_{n+1} ，(例如 $x_{n+1} - x_n > x_n - x_1$)，則 $d(S) = d(S') + n = k$ ，其中 $S = S' \cup \{x_{n+1}\}$ 。