徵答問題細目

本期徵答問題

上期徵答問題

本期徵答問題

11101 以複數方法解正多邊形外接圓問題

（朱建正提供）

本題是73年全國高中數學競試初試第六題，題目如下：

令 P 為正 $2n+1$ 邊形 $A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{2n}$ 外接圓弧 A_0A_1 上一點。

求證：$PA_2+\cdots\cdots+PA_{2n}=PA_0+PA_1+PA_3+\cdots\cdots+PA_{2n-1}$

關於本題，命題者有一點小故事。

高二暑假時，同學說他有一個就讀北一女的妹妹剩下幾道平面幾何不會做。我去幫她解決。其中有一道是「令 P 爲正五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 外接圓弧 A_0A_1 上一點……」。

我因知道正三角形的類似問題，便設法加以推廣，於是解出本題。我那時解時，是分開求級數和，再證明兩和相等。最近由於差和分級數(telescoping series)做了很多，在給參考解答時試以此法解之，果然不負所望。

其解法如下：

令P點坐標爲$(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，由題意 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2n+1}$，$A_k$點坐標爲$(\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}, \sin\dfrac{2k\pi}{2n+1})$ 由 $e^{i\alpha}$，$e^{i\beta}$之距離公式：

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=2(1-\cos(\alpha-\beta))$$
$$=2\sin\frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

得 $PA_k=2\sin(\dfrac{k\pi}{2n+1}-\theta)>0$

故欲證原題，即證

$$\sin(\frac{\pi}{2n+1}-\theta)+\sin(\frac{3\pi}{2n+1}-\theta)+\cdots\cdots+\sin(\frac{2n-1}{2n+1}\pi-\theta)+\sin\theta$$
$$=\sin(\frac{2\pi}{2n+1}-\theta)+\sin(\frac{4\pi}{2n+1}-\theta)+\cdots\cdots+\sin(\frac{2n\pi}{2n+1}-\theta)$$

即證 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(\frac{(2n+1)-(2k-1)}{2n+1}\pi-\theta)-\sin(\frac{2k-1}{2n+1}\pi-\theta)\right]=\sin\theta$

由和差化積公式

$$\sin(\frac{(2n+1)-(2k-1)}{2n+1}\pi-\theta)-\sin(\frac{2k-1}{2n+1}\pi-\theta)$$
$$=2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{2k-1}{2n+1}\pi)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$$
$$=2\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi\sin\theta$$

所以，現在只要證明

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi=\frac{1}{2} \quad 即可。$$

因 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sin\frac{2k+1}{2n+1}\pi-\sin\frac{2k-3}{2n+1}\pi)$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k+1}{2n+1}\pi-\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k+1}{2n+1}\pi-\sin\frac{\pi}{2n+1}+\sin\frac{\pi}{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(\sin\pi+\sin(\frac{2n-1}{2n+1})\pi)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2n+1}$$

故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi=\frac{1}{2}$ 得證。

故原題得證。

但是，上解仍甚冗長。因正多邊形與1的複數根有密切關係，因此非常想要以複數方法解之。嘗試多次，始終未果。最近終獲成功，故很想用以試試諸位。

11102 T-集合元素個數之最大可能值

（王子俠 提供）

考慮集合 $N_n=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$，$n\geqslant 4$。若$S$爲 N_n之子集合（至少含三個元素）且對所有S中之相異元素x，y，z均滿足$x+y>z$，則稱S爲一個“T-集合”。以$f(n)$表T-集合之元素個數之最大可能值。

(a)求$f(n)$，

(b)找出所有滿足$|S|=f(n)$之T-集合S。