快活的數學家——

五丶掛谷宗一

(1886—1947)

顏一清 譯

小傳：

掛谷宗一在明治四十二年從東京大學數學科畢業。曾留學美國，並擔任東北大學及東京文理科大學教授，後任東京大學教授，在終戰當年任理學部長（相當於理學院院長，譯者）。曾任統計數理研究所第一任所長，他的專長是解析學。在東北大學時期，與聚集在那裡的林鶴一、窪田忠彥、藤原松三郎、高須鶴三郎等教授合力研究，在卵形線的研究上留有良好的成果。

1.教老師

我在中川銓吉教授那一段裡提過，當年留德的多數先生們都留漂亮的Kaiser鬍子回來。我問掛谷教授，他是留美的，該沒有留鬍子回來吧？但他却說「我曾經也留過這麼好看的鬍子哩。」就把他跟東北大學的學生們的合照拿給我看。的確，照片裡的老師留着很漂亮的Kaiser 鬍子。接着他告訴我爲什麼：

舊制的高等學校等於是以前的帝國大學（日本舊制國立大學之稱，譯者），如東京帝大、京都帝大等的學生養成所（譯者註）。因此，東京帝國大學理學部的某一科的入學志願者名額如果沒有額滿，則全數可免試得到入學許可。不過我考東京帝大那個時候，每一科的志願者人數都會超出定額，故都舉行有一點多倍，不到兩倍競爭率的入學考試。但是當時新設立的東北帝國大學入學志願者較少，舊制高等學校畢業生申請入學的人數難得能額滿。在這種情形之下，往往有第二次招生。這個時候非舊制高等學校畢業生，有同等或更高等學歷的人，如高等師範學校畢業生，都可以參加入學考試。

因此有高等師範學校或是其他學校畢業而已經當過中學老師的人應考東北帝大的第二次招生，考試及格入學的人也眞不少。事實上確有掛谷教授的老師進了東北帝大，並修他的課。掛谷教授說，爲了分辨誰是教授，誰是學生起見，留Kaiser鬍子是必需的。

他又笑着說課堂上稱他「掛谷教授」的學生一踏出教室一步便大叫他「喂，掛谷！」了！

譯者註：日本的舊制學年制是小學六年，中學五年，高等學校三年，大學三年（醫科四年）。日本境內有八所公立高等學校，入學考

試在同一個日期。故考生須斟酌自己的實力報考一校，競爭相當激烈。八校中以第一、第三高第學校(簡稱一高、三高)最著名,許多人才出自此二校。

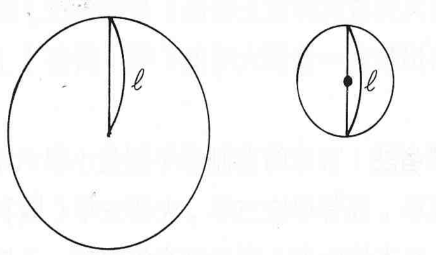
當時本省人考中學以上學校受名額限制，比如，不管有多少優秀的本省人去赴考，每年能考取一高的名額只有一名！即使台大預科（台北帝國大學（台灣大學前身）預科的簡稱，相當於直屬台大的高等學校，可直升台大），本省人考醫科的錄取名額不能超出醫科錄取名額的25％，其他科一律只能佔5％，這是日本人對本省人的一種愚民政策，限制本省人受高等教育。即使受高等教育，也希望本省人多當醫生，守住自己的工作崗位，安安份份做人，不要去搞與文化、思想有關的事。

2.掛谷（Kake-Tani）問題

掛谷教授的專長是解析學，也就是包括微積分學、微分方程式論、積分方程式論、變分學、實變函數論與複變函數論等廣泛的範圍。他在這些方面留下不少很好的論著。不但如此，他也很擅長出一些如同點出大家的盲點那樣的問題。其中有一個是很有名的「掛谷問題」。即：「長度爲 ℓ 的線段，在平面上作一回轉所需最小面積的圖形爲何？」

如果把這個線段的一端固定，另一端作一回轉所需面積爲以 ℓ 爲半徑的圓，它的面積相當大。

如果固定這個線段的中點，作一回轉所需面積爲以 $\frac{\ell}{2}$ 爲半徑的圓，面積比先前的小得多了。如下圖：

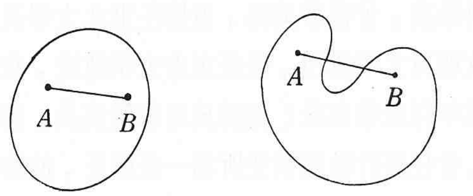


掛谷問題就是想在更小的面積內回轉長度爲 ℓ 的線段。

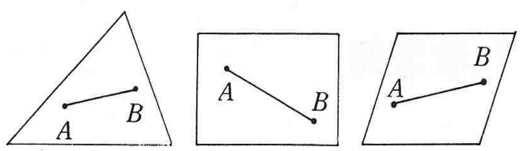
3.卵形線

爲了繼續前段的話題，需要一些卵形線的知識。說起卵形線，大家會想成蛋形的曲線吧。但是數學上我們定義爲「閉點集合中，任意兩點連成直線，若此線段上任一點皆屬於此集合，則此集合稱爲凸形。凸形的邊界曲線則稱爲卵形線。」

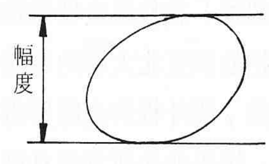
由定義，下圖左是凸形，因爲圖中任意兩點間的線段皆含在圖形內。相反地，下圖右則不是凸形。因爲它的圖形內有那麼兩點 A、B，$\overline{AB}$ 上有不屬於圖形內的點。



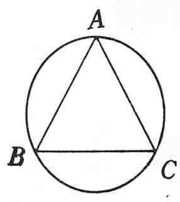
由定義，三角形、長方形、菱形都是凸形。因爲這些圖形內的任意兩點所成線段上各點完全屬於這些圖形內。



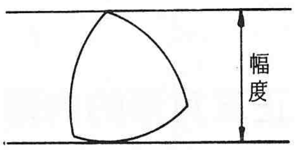
現在用一對平行線夾住一個卵形線，如下圖，則兩平行線間的距離稱爲這個卵形線在平



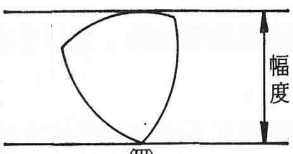
行線方向的幅度。卵形線的幅度在任何方向都一定，則稱這個卵形線爲定幅曲線。圓當然是一個定幅曲線。但是有沒有其他定幅曲線呢？我們已經知道，有任意多這一類曲線。其中最著名的叫做魯洛（Franz Reuleaux，1829—1905）三角形。它的形狀是：先作一正三角形 ABC，再以 A 爲圓心，AB 爲半徑畫 BC 間的圓弧。又分別以 B、C 爲圓心，BC 爲半徑畫圓弧 $\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$。$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 所圍成的圖形稱爲魯洛三角形如下圖（I）。魯洛三角形是以原先的正三角形的一邊爲幅度的定幅曲線，這個事實由下圖（II）、（III）該看得出吧？



(I)

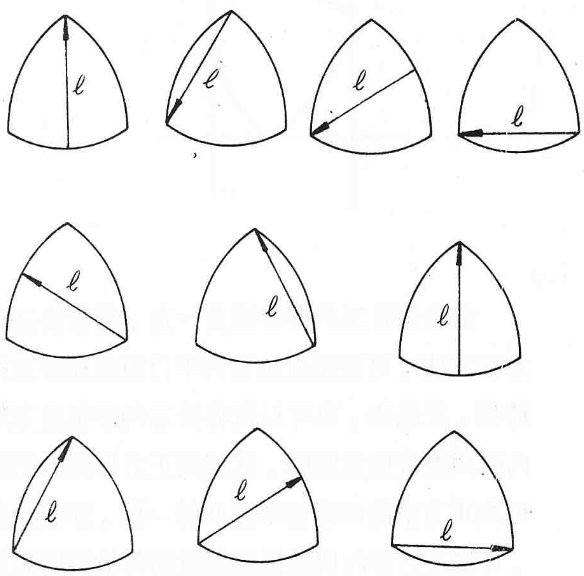


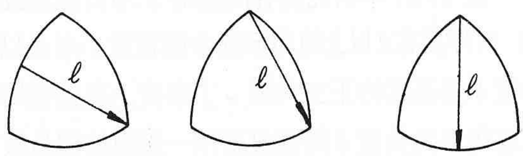
(II)



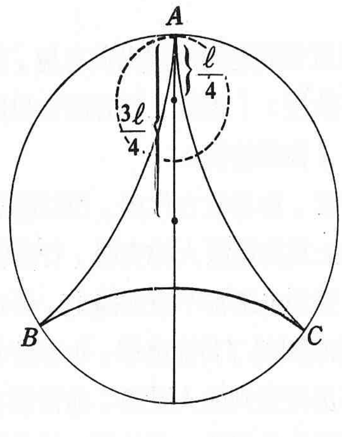
(III)

長度爲 ℓ 的線段可以在魯格三角形中作一回轉，如下圖：



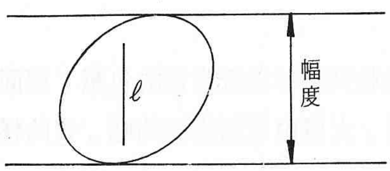


因此，有「魯洛三角形可能是掛谷問題的解答」這種想法。不過後來發現，比魯洛三角形的面積更小，而在裡面可以把長度 ℓ 的線段作一回轉的圖形。它的作法是這樣的：考慮以直徑爲 $\frac{3\ell}{2}$ 的圓，其中有一內切圓，直徑爲 $\frac{\ell}{2}$，兩圓切於 A 點。小圓在大圓中滾動時，最初位置在 A 的小圓上一定點 p 畫成有三個尖點的曲線，如下圖。圖中 AD 的長度爲 ℓ。這個曲線稱爲內擺線。圖中長度 ℓ 的線段 AD 可以作一回轉，曲線內的面積也比魯洛三角形爲小。但是這個曲線不是卵形線。於是產生這樣的問題：「如果在凸形內，使長度 ℓ 的線段作一回轉，則掛谷問題的解答如何？」



前面已經介紹過卵形線的幅度。這些幅度中的最大值與最小值就分別稱爲這個卵形線的直徑與厚度吧。

現在，如果在一卵形線內，長度 ℓ 的線段可作一回轉。令線段取如下圖的位置，再取二平行線垂直於這線段並夾住卵形線，則其幅度會不小於 ℓ，故卵形線的厚度不小於 ℓ。



在1921年研究掛谷問題的J.p'al終於證出:「厚度在ℓ以上的卵形線中面積最小者是以長度ℓ爲高度的正三角形。」事實上在這樣的正三角形內長度ℓ的線段要作一回轉的確是做得到的。所以,如果答案限制在卵形線的話這便是「掛谷問題」的解了。如果答案不限制在卵形線,掛谷問題的解答又怎麼樣呢?

對於這個問題A. S. Besicovitch 有以下的答案:

「可作任意小的面積,使長度ℓ的線段在其內部作一回轉。」

4.茅房與槍

上面所說的掛谷問題太有名了,以致於有解答的今日,還時常有「關於掛谷問題」的論文。

我覺得這個問題的着想點很有趣,所以曾經問過掛谷敎授:「老師,您怎麼會想出這個問題來呢?」他回答說:

「矢野君,你喜歡古代劇,所以應該知道,古時候武士爲防範敵人的突襲,行動都非常小心謹慎,譬如走路都不敢靠邊走,要走在路中央。又,如厠時爲了防備襲擊,也都帶着短槍。如果上茅房時遇到敵人來襲,他需要在那個小空間內揮動他的短槍。我的問題便是這樣想出來的。」我實在不知道這個回答有多少正經的成分。

5.愛包容一切

有一次我收到掛谷敎授贈送的包袱。裡面染着一種圖案,大概由老師構想的吧。它的樣子是:

在數學上,-1的平方根就以$\sqrt{-1}$這個虛數(imaginary number)來表示,並取英文的首字i代表它。我想,這個圖案跟i有關連,但還是猜不透這個謎題,只好向他投降,請敎他這個圖案的意思。結果掛谷敎授笑迷迷地說:

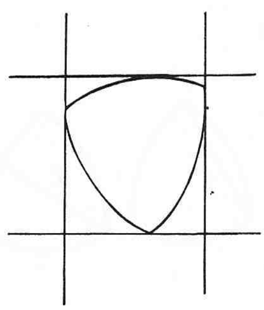
「矢野君,不是從古就說『愛(與i同音,譯者)可以包容一切』麼?」。

我在某一女子大學講課時,有一位同學忘記了含有i的公式。我學着掛谷敎授的樣子說:「女生忘記i(與愛同音)不是很糟糕麼?」可惜,這個幽默對方並沒有聽懂。

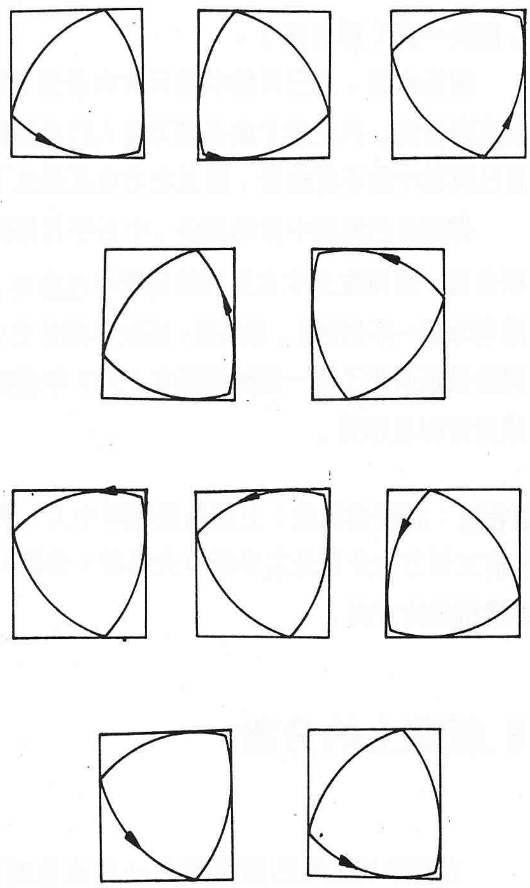
6.正三角形的內轉形

前面已經說過定幅曲線,並以魯洛三角形爲代表性的例子。

現在以兩組相互正交的平行線夾住魯洛三角形,則所得四角形爲正方形,如下圖:

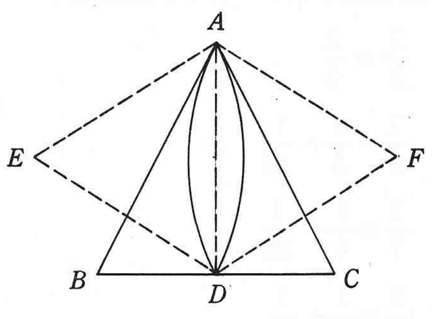


由於魯洛三角形的幅度一定,把魯洛三角形固定住,可使兩組垂直的平行直線繞着三角形轉。反過來,也可以使魯洛三角形在正方形內與四邊接觸並回轉,就如同正方形的內切圓可與正方形的四邊相切並回轉一樣。如此這般,可在正方形內與四邊接觸並回轉的圖形稱爲正方形的內轉形。

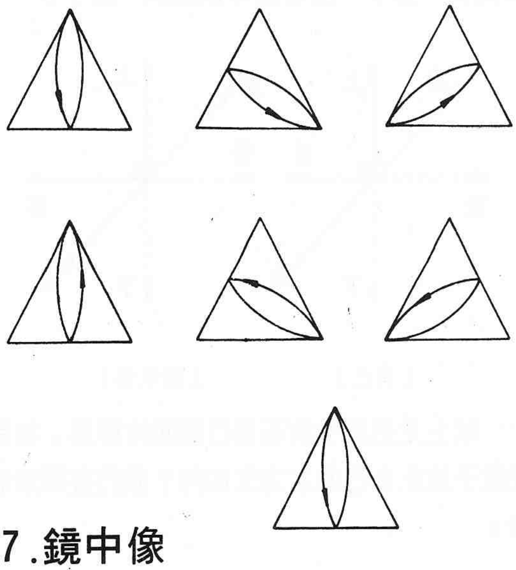


接着藤原教授與掛谷教授開始研究起正三角形的內轉形來。正三角形的內切圓是它的內轉形，他們研究有沒有其他的正三角形的內轉形，而發現下面的內轉形：

作正三角形 ABC。過頂點 A 作對邊 BC 的垂線，令垂足爲 D。以 AD 爲一邊作正三角 ADE 與 ADF。又各以 E、F 爲圓心，AD 爲半徑作 AD 的兩個圓弧。這個由兩圓弧所成的圖形 AD 稱爲二角形 AD。如下圖。



原來這個二角形可以在正三角形內與三邊接觸並回轉！這個二角形稱爲藤原、掛谷二角形。



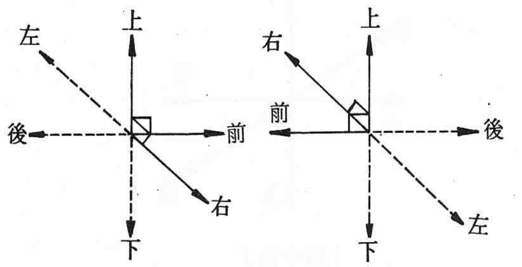
7.鏡中像

有一次，掛谷教授在東京大學理學部的教授會議開始前的座談時對着在座的教授們提出下面的問題：

「我們照鏡子時，自己的像與鏡中的映像左右相反。但是爲什麼只有左右相反，而前後、上下不相反呢？」

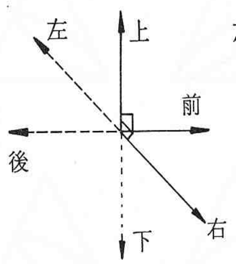
在理學部的教授中這個問題對數學與物理學的教授們來說還不怎麼樣，但是對其他科的教授們來說，大概是相當難的題目。掛谷教授事後告訴我說：「還虧他是理學部的教授呢。竟有人答成『因爲用左右兩隻眼睛看的緣故。』那會這樣！用單眼看左右方還不是相反！」看他的樣子還蠻享受他出題的效果呢。

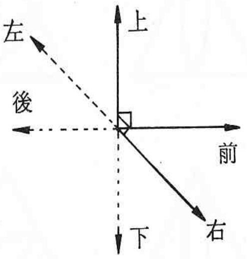
照鏡子時如下圖，以鏡中像來說它的右邊是自己的左邊照進去的。左邊是右邊照進去的。這樣想的人自然以爲自己與鏡中像左右相反。但是請看清楚下圖。我對着鏡子看，而鏡中像對着我。故照鏡子時前後應該視爲相反。



（自己）　（鏡中像）

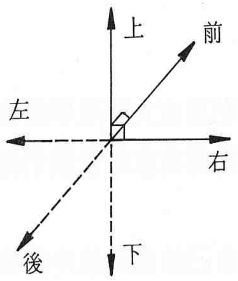
如果前圖中鏡中像的前後換過來則與自己的前後、上下、左右就可以想成一致了。

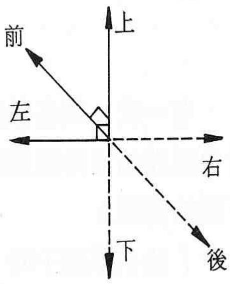




(自己)　　(鏡中像)

以上是把鏡子放在自己前面的情形。如果把鏡子放在自己的右方又如何？我們畫圖形看看：

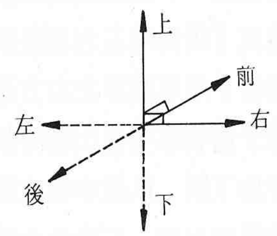




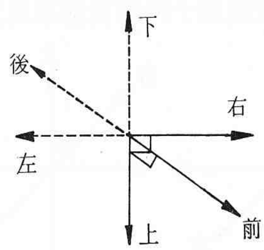
(自己)　　(鏡中像)

如上圖，在這個情形下，如果我們動右肩膀，鏡中像動左肩膀，所以人會想：左右關係反過來了，但是前後關係依舊。

最後，如果把鏡子放在頭頂上又如何呢？



(自己)



(鏡中像)

由上圖，我們認為鏡中像與自己上下相反，前後一致(譯者註)。

總括來說，自己與鏡中像只有向着鏡子那個方向相反。但是鏡子放在前方時人們會想成自己與鏡中像不但前後，而且左右也反過來了。

有關自己與鏡中像的關係，中谷宇吉郎與朝永振一郎兩位先生在他們的隨筆中也論及。據朝永振一郎先生說，李政道、楊振寧兩位先生因為徹底研究了這一類問題而在1957年獲得諾貝爾物理學獎。

譯者註：請讀者記住：上面各坐標圖中上、右、前三個方向分別是右手系中大姆指、食指、中指所指的方向。

8.紙草上的分數

古時候埃及的尼羅河畔長一種水草叫做papyrus 古埃及人使用這水草造成一種紙，在它上面寫字。據說英文稱紙為paper，語源就出自papyrus 這個字。我們依據寫在這些紙草上的事，獲悉古埃及人的各種情況。

紙草中尤其以紀元前2000年至1700年間的一位祭司Ahmes所寫下當時數學知識的紙草最為出名。它算是世界上最古老的數學書，而以著者的名字命名為Ahmes紙草(有1呎寬18呎長，譯者)或以發現者的名字稱為Rhind紙草。目前它保存在大英博物館。

在Ahmes紙草中有下列的記載：

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{104}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}\ 。$$

即，以2爲分子，由3至101的連續奇數爲分母的分數寫成相異單位分數（分子爲1的分數）的和。看來，古埃及人是苦心作成這個表的!

奇怪的是他們並沒有分解$\frac{2}{3}$，不過第四條的

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

兩邊各乘以3倍可得

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

故古埃及人應該也知道$\frac{2}{3}$的分解法才對。

用這些表，古埃及人能夠把任意既約分數寫成分母相異的單位分數的和。譬如要把$\frac{3}{5}$改成相異分母的單位分數和，則先令

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$$

再代入前面有關$\frac{2}{5}$的公式，得

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\ 。$$

又要改$\frac{4}{5}$爲相異分母的單位分數和，則令

$$\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\times 2$$

代入$\frac{2}{5}$的公式，得

$$\frac{4}{5}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\times 2$$

$$即，=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$$

又由表代入$\frac{2}{3}$與$\frac{2}{15}$的公式，得

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}。$$

當Ahmes 紙草中以2爲分子，奇數爲分母的分數改成相異單位分數和成爲我們的話題時，掛谷敎授稍爲想一下，便把小於1的既約分數$\frac{a}{b}$改成爲分母相異的單位分數和的形式寫出來了。

因$\frac{a}{b}<1$，故b大於a。令

$$b=qa+r\quad，(0<r<a)$$

r大於0，因爲$\frac{a}{b}$是既約分數，a不能除盡b，又r比a小，因爲r是b除a後的餘數。再來，作下面的運算：

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{q+1}=\frac{a(q+1)-b}{b(q+1)}$$

$$=\frac{a(q+1)-(qa+r)}{b(q+1)}$$

$$=\frac{a-r}{b(q+1)}$$

因此，$\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{a-r}{b(q+1)}$ 。

這個式子把$\frac{a}{b}$改成爲一個單位分數與分子小於a的分數的和。再把上式的第二項繼續使用上面的方法運算下去，便可把原先的分數改成爲相異分母的單位分數和。譬如，我們把依照紙草可改成

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

的$\frac{4}{5}$用掛谷敎授的分法計算一下。

先把5用4來除：

$$5=1\times 4+1，$$

即$q=1$，$r=1$。故

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

$\frac{3}{10}$ 又使用同法得

$$10 = 3 \times 3 + 1$$

即，$q=3$，$r=1$，故

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

即，$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

因此，$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

這個答案與紙草的解答不一樣。由此可見，給定一個分數，把它改成爲分母相異的相異分數和的方法不僅有一種。

而且我還認爲掛谷教授的方法比紙草的方法高明。

9.在課堂上

掛谷教授當過一所舊制專科學校研究科的講師。有一次研究科的一個學生告訴我說：

「掛谷老師眞是很棒吔！」我說：「是啊，他很棒啊，連外國的學者都知道他的名字哩。不過，爲什麼你覺得他棒呢？」

據他說是這樣的：上課鐘響後老師來了，老師向他敬禮的學生們還過禮後，打開他的筆記問：「上次講到那裡了？」邊問邊翻到前面講到的地方。當他看到當天開始要講的地方時覺得有什麼不對勁吧，就「哼」了一聲，想起事情來。學生們打開筆記本耐着性子等老師講課。結果掛谷老師長考了一個小時，下課鐘終於打了。聽到下課鐘，老師才回醒過來，說：「今天到此爲止。」就走出教室去了。那位學生又說：

「一般的老師遇到這個情況，要嘛跳過去不講，要嘛用其他的話塘塞過去。可是掛谷老師硬是要他自己懂得了才跟學生講。眞的，他很棒！」

—本文譯者任教輔仁大學數學系—