統計專題

波松過程的一些性質

黃文璋

一、前　言

在隨機過程(Stochastic Process)裏韋納(Wiener)過程及波松(Poisson)過程扮演著主要的角色。一方面它們常可用來做爲描述許多重要現象的模式，另一方面許多有用的隨機過程可藉此二過程爲基礎而建立起來。在本文我們將只討論一些波松過程的性質。

波松過程乃起源於許多實際的應用，常見的有如某段時間內到達某商店的顧客數，某地所發生的意外事件，某蓋氏計算器(Geiger Counter)所測出的放射粒子數，打進某電話交換處的次數。在這些例子裏，波松過程往往可很恰當地描述所謂「到達過程」(Arrival Process)，其定義如下：

假設$\{A(t), t\geq 0\}$爲定義於某機率空間$(\Omega, \mathscr{F}, P)$之一隨機過程(即每一$A(t)$皆爲一隨機變數)，且設$A(t)$對t非漸減，皆取非負整數值而$A(0)=0$。在實際的例子裏，若t表時間，通常$A(t)$可代表$[0,t]$間顧客到達的數目(number of arrivals)或某事件發生的總次數。而每一樣本空間Ω中的一個樣本ω即對應一樣本路徑(sample path) $A(t,\omega)$，我們假設對「幾乎所有」(almost surely) $\omega\in\Omega$，$A(t,\omega)$爲一每次只跳升一個單位的階梯函數(step function)且$A(t,\omega)<\infty$。每有一跳升(jump)，即表此刻有一顧客到達，如此的隨機過程$\{A(t), t\geq 0\}$即稱爲一到達過程。

所以簡單地說，到達過程即描述進入某系統的過程，此過程允許每次僅一個「顧客」到達，在很多情況中，我們可做如此的假設，而設想同一時刻會有數個顧客到達的機率爲零，也就是說幾乎不可能發生。波松過程，再生(renewal)過程及很多其他過程皆爲到達過程。對於波松過程有許多不同的方式來定義，如有由再生過程來定義，有經由馬可夫(Markov)過程來定義，下一節裏我們將利用到達過程來定義波松過程。

二、波松過程的定義

如何在到達過程裏，加進一些條件，使其成爲一波松過程？最常見的爲下述定義(註1)。

定義1：一個到達過程$\{A(t), t\geq 0\}$稱爲一齊性(homogeneous)的波松過程，若下述

二條件成立：

(i)對任意$n>1$，及$0=t_0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n<\infty$，$A(t_1)$，$A(t_2)-A(t_1)$，…$A(t_n)-A(t_{n-1})$爲$n$個相互獨立之隨機變數；

(ii)對任意$t,s\geq 0$，$A(t+s)-A(s)$之分佈與s無關。

定義 2：一個到達過程稱爲一（可能的）非齊性波松過程，若下述二條件成立：

(i)對任意$n>1$，及$0=t_0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n<\infty$，$A(t_1)$，$A(t_2)-A(t_1)$，……，$A(t_n)-A(t_{n-1})$爲$n$個相互獨立之隨機變數；

(ii)$a(t)\equiv E[A(t)]$，$t\geqslant 0$　對每一$t\geqslant 0$皆連續。

在定義2中，我們用「可能的」，這是因在特別情況下（如期望值函數$a(t)=\lambda t$），它也有可能是齊性波松過程，不過爲了簡明，底下我們將省略「可能的」字眼。另外在上述二定義裏的條件(i)，即是所謂的獨立增量(independent　increments）性質（韋納過程也具有此性質）。而隨機過程若具有定義1中的條件(ii)，即稱爲有定常增量（stationary increments）。換句話說，若在不重疊的時區（time，intervals)內之到達數相互獨立，則此過程有獨立增量性質；若在任意時區內之到達數之分佈只與此時區之長度有關，便稱爲具有定常增量。利用定義1我們得到下述定理：

定理 1：若$\{A(t),t\geqslant 0\}$　滿足定義1，則

$$(1)\ P(A(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},$$

$$k=0,1,2,\cdots\cdots,$$

其中λ爲某$\geqslant 0$之常數。

若$\lambda=0$，則表$A(t)$恒爲0，我們將不考慮這種情況。

證明在此從略，有興趣的讀者可參考Cinlar一書。值得注意的是，若一個到達過程僅滿足(1)即若只是對每一$t>0$，$A(t)$有波松分佈，則它不一定是波松過程，易言之它不一定具有獨立增量的性質，反例很多（註2）。雖然反例在20年前（1967）便提出了，但直到今日仍有人疏忽此性質，如在著名統計學家Kruskal與Tanur所主編之國際統計百科全書（註3），及作業研究學裏常用的一本由Hillier及Lieberman　合著之教科書（註4）中，均說若(1)式成立，則$\{A(t),t\geqslant 0\}$便是一個波松過程，這是不對的。不過我們却有下述結果

定理 2：一到達過程$\{A(t),\ t\geqslant 0\}$爲一參數λ之波松過程若且唯若

$$(2)\ P(A(B)=k)=\frac{e^{-\lambda b}(\lambda b)^k}{k!},$$

$$k=0,1,2,\cdots\cdots,$$

對每一B皆成立，其中B爲$[0,\infty)$中任意有限個不相交之區間（interval）之聯集。

定理2中的$A(B)$表B中的到達數，b表B之長度。相對於定理1，對非齊性的波松過程，有底下的定理。

定理 3：若一到達過程$\{A(t),t\geqslant 0\}$滿足定義2，則

$$(3)\qquad P(A(t)=k)=\frac{e^{-a(t)}a^k(t)}{k!},$$

$$k=0,1,2,\cdots\cdots,$$

現在我們試將波松過程定義中的條件(i)減弱，僅要求事件$\{A(t_i)-A(t_{i-1})=0\}$，$i=1,\cdots,n$相互獨立就夠了。換句話說，這個看起來很弱的條件，可導出獨立增量的性質。另外在定理裏，若一敍述後面有"a.s."（almost　surely）就是對幾乎所有$\omega\in\Omega$成立的意思。

定理 4：一個到達過程 $\{A(t),\ t\geqslant 0\}$ 為一齊性波松過程若且唯若

(i) 對任意 $n>1$ 及 $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n<\infty$，事件 $\{A(t_i)-A(t_{i-1})=0\}$，$i=1,\cdots\cdots,n$ 相互獨立；

(ii) 對任意 $t,s\geqslant 0$，$P(A(t+s)-A(s)=0)$ 之分佈與 s 無關。

證明：必要性是很顯然的，我們只證明充分性。現在證明由 (i) 可得獨立增量的性質。

對任意 $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n<\infty$，將每一區間 $(t_{i-1},\ t_i]$ 分成 k 個子區間，長度各為 $(t_i-t_{i-1})/k$。令 $S_k(t_i)$ 表 $(0,t_i]$ 中有 $\geqslant 1$ 個到達的子區間數。由條件 (i) 利用母函數（generating function）之性質知，對 $|u_i|\leqslant 1$，$i=1,\cdots\cdots,n$

$$(4)\quad E\left(\prod_{i=1}^{n} u_i^{S_k(t_i)-S_k(t_{i-1})}\right)=\prod_{i=1}^{n}E\left(u_i^{S_k(t_i)-S_k(t_{i-1})}\right)。$$

由於 $A(t)<\infty$，$\forall t\geqslant 0$，$a.s.$，且對幾乎所有之 $\omega\in\Omega$ 每次之跳升僅為 1，不難看出對每一 $i=1,\cdots\cdots,n$ $S_k(t_i)\to A(t_i)$，$a.s.$，當 $k\to\infty$，由有界收斂定理（Bounded Convergence Theorem），(4)式導出

$$(5)\quad E\left(\prod_{i=1}^{n} u_i^{A(t_i)-A(t_{i-1})}\right)=\prod_{i=1}^{n}E\left(u_i^{A(t_i)-A(t_{i-1})}\right)，$$

此即證出 $\{A(t),\ t\geqslant 0\}$ 有獨立增量的性質。同理由 (ii) 可得 $A(t+s)-A(s)$ 與 s 無關，故本定理得證。

推論：若 $A(t)\neq 0$ $a.s.$ 且為一齊性波松過程，則對每一 $t>0$，$A(t)$ 為具有某參數 $\lambda>0$ 之波松分佈。

證明：顯然事件 $\{A(t+s)=0\}$ 與事件 $\{A(t)=0,\ A(t+s)-A(t)=0\}$ 相等，因此由假設 $\{A(t+s)-A(t)=0\}$ 與 $\{A(t)=0\}$ 獨立可得

$$\begin{aligned}(6)\quad P(A(t+s)=0)&=P(A(t)=0)P(A(t+s)-A(t)=0)\\&=P(A(t)=0)P(A(s)=0),\end{aligned}$$

後二者相等是利用到定理 4 裏的條件 (ii)。令 $f(t)=P(A(t)=0)$，由(6)可得

$$(7)\quad f(t+s)=f(t)f(s)$$

由於 $A(t)\neq 0$ $a.s.$，且 $A(t)<\infty$，$a.s.$，所以(7)式之解即為

$$(8)\quad f(t)=e^{-\lambda t},$$

其中 λ 為某 >0 之常數。

將區間 $(0,t]$ 分割成 k 個長度各為 t/k 之等長子區間，令 $S_k(t)$ 表其中有一個或更多之到達的子區間數。由定理 4 之條件 (i) 與 (ii)，我們可將 $S_k(t)$ 想成在 k 個白努利試驗（Bernoulli trials）中的成功數，其中所謂在第 m 次試驗裏的「成功」即表在第 m 個子區間裏有一個或更多個到達且由(8) P（第 m 次試驗成功）$=1-e^{-\lambda t/k}$。對 $\forall|u|\leqslant 1$，當 $k\to\infty$ 時

$$\begin{aligned}(9)\quad E\left(u^{S_k(t)}\right)&=[1-(1-u)(1-e^{-\lambda t/k})]^k\\&\to e^{-(1-u)\lambda t}=E(u^{A(t)})。\end{aligned}$$

即證出 $A(t)$ 之母函數恰為參數 λt 之波松分佈之母函數，由於母函數可唯一決定分佈，因此 $A(t)$ 為具有參數 λt 之波松分佈。

對非齊性的情況，我們有下述二條件皆較弱的定理及其推論，證明也不難，不過我們省略了。

定理 5：一個到達過程 $\{A(t),\ t\geqslant 0\}$ 為一非齊性的波松過程，若且唯若

(i) 對任意 $n>1$ 及 $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n<\infty$，事件 $\{A(t_i)-A(t_{i-1})=0\}$，$i=1,\cdots\cdots,n$ 為相互獨立；

(ii) $\forall t>0$ 及 $\varepsilon>0$ $\exists 0<\delta<t$ 使得 $P(A(t+\delta)-A(t-\delta)=0)>1-\varepsilon$。

當然我們還有許多不同的方式來描述波松過程，可參閱孫自健先生曾在本刊寫的「談談卜松過程」（註 5）及一般的隨機過程的書。**定理 4 及定理 5 對於波松過程用很簡單的方式**

藉一些性質對其做些描述(qualitative characterization)。舉例而言,令隨機變數$A(t)$表時區$(0,t]$內在某湖內所釣上的魚之總數,假設湖內之魚非常之多,因此在任何不同時區內是否會釣到魚互不影響(即事件$\{A(t_i)-A(t_{i-1})=0\}$,$i=1,\cdots\cdots,n$相互獨立)。

若再假設情況(一)若在任何時刻是否會釣到魚的機會皆相同(即$P(A(t+s)-A(s)=0)$與s無關),則$\{A(t),t\geqslant 0\}$構成一齊性波松過程。情況(二)若不同的時刻,釣到魚的機會不同(如早上、中午或黃昏之別),則把$\{A(t),t\geqslant 0\}$看做一非齊性波松過程是很恰當的。如果我們了解了定理4與定理5,也會明白爲什麼很多實際的現象往往可用波松過程做爲模式。

三、波松過程之進一步探討

波松過程尚與許多重要的分佈有密切的關係,就齊性波松過程$\{A(t),t\geqslant 0\}$而言,其與波松分佈關係之密切自然不在話下。另外設參數爲λ且令T_k表介於第k個及第$(k+1)$個到達所需的時間,$k=0,1,2,\cdots\cdots$,隨機變數T_k便是所謂「等待時間」(waiting time)或稱顧客到達時距(interarival time)。又令

$$S_k=\sum_{i=0}^{k-1} T_i=\text{第}\,k\,\text{個到達之時刻}。$$

(一)與指數分佈之關係

$T_1,T_2,\cdots\cdots$,爲獨立且有同樣(IID)的指數分佈之隨機變數,參數爲λ。

(二)與加馬(Gamma)分佈之關係

S_k有加馬分佈,二參數各爲k及λ。

(三)與均勻(uniform)分佈之關係

對任意$0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant s_n\leqslant t$,

$$(10)\quad P(S_i\leqslant s_i,i=1,\cdots,n\mid A(t)=n)$$
$$=\frac{n!}{t^n}\int_0^{s_1}\cdots\int_{x_{n-2}}^{s_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{s_n}dx_n\cdots dx_1,$$

這是取自$[0,t]$上的均勻分佈且樣本爲n之順序統計量(order statistics)之分佈。亦即若已知至時刻t有n個到達,這n個到達時刻之分佈如何呢?剛好就如自$[0,t]$上均勻分佈的隨機變數,獨立地選取n個樣本$X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$,再由小至大排列,$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\cdots\leqslant X_{(n)}$,則$X_{(i)}$爲第$i$個到達時刻餘類推。一個隨機過程若具有上述性質便稱爲有順序統計量(order statistic)之性質,此性質我們將在下一節再略做討論。

(四)與二項分佈之關係

波松過程裏有一著名的稀有事件法則(law of rare events)。首先假設我們有許多(n次)白努利試驗,每次成功的機率p_n很小,但若np_n趨近一常數λ,則實際會發生的事件次數,當$n\to\infty$時會遵循波松分佈。底下試舉二例來說明此法則。

例1:設在24小時內,某電話交換處有許多電話進出,設有n通,而每次也有一很小的機率p會接錯線,則在此段時間內總共會接錯的電話次數(有二項分佈$B(n,p)$),可以用一參數爲$\lambda=np$之波松分佈來估計。

例2:考慮一放射物質,平均每秒會放射出λ個粒子(每秒會放射出之粒子個數實際上是隨機的)。假設此物質內含有n個粒子,我們似乎可以合理的假設在一長度爲t秒之時區內,每粒子會被射出之機率p近似於$\lambda t/n$,另一似也合理的假設是每個粒子均獨立地被射出。在這些假設下,若令$A(t)$表至時間t所射出之粒子數,則$\{A(t),t\geqslant 0\}$接近於一參數爲λ之齊性波松過程。只要t與此物質之半衰期相比很小,上述估計是頗精確的。

由上所提的稀有事件法則,我們可明白自然界裏爲什麼各種不同的災難常會發生,雖然它們看起來發生的機會(其實只是指在一小段時間內之機會)是如此地小(我們疏忽了t很大)。

波松過程與二項分佈尚有其他關係。例如設$u<t$且$k<n$,不難由獨立增量的性質導出

(11)　$P(A(u)=k \mid A(t)=n)$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{u}{t}\right)^{k}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k},$$

即給定在時間 t 已有 n 個到達，則在時間 u，$u<t$，會有多少到達呢？答案爲 $B\left(n,\frac{u}{t}\right)$ 之二項分佈。

又如設 $\{A_1(t), t\geqslant 0\}$ 及 $\{A_2(t), t\geqslant 0\}$ 爲二獨立波松過程參數各爲 λ_1 及 λ_2，則

(12)　$P(A_1(t)=k \mid A_1(t)+A_2(t)=n)$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

其他由中央極限定理（Central Limit Theorem），波松過程當然與常態（normal）分佈有關我們就不多討論了。

四、順序統計量性質之應用

齊性及非齊性波松過程皆具有順序統計量的性質，其定義如下：

定義 3：對所有 $t>0$，以及每一 $k\geqslant 1$，當 $P(A(t)=k)>0$，給定 $A(t)=k$，若那些到達時刻 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_k$ 之分佈就如 k 個〔$0, t$〕上獨立且有某相同分佈 $F_t(\cdot)$ 之隨機變數的順序統計量，則稱 $\{A(t), t\geq 0\}$ 有順序統計量的性質。

若在齊性波松過程的情況，則 $F_t(x)=\frac{x}{t}$，$x\in$〔$0, t$〕。直觀上，我們通常說在給定〔$0, t$〕間有 k 個到達的條件下，這 k 個到達時刻 $S_1<S_2<\cdots\cdots<S_k$，若看成沒有大小排列之隨機變數，便相互獨立且均在〔$0, t$〕上均勻分佈。這個性質很有用也提供了一個產生（generate）波松過程的方法。若是非齊性波松過程，且 $A(t)$ 之期望值 $\mathrm{E}(A(t))=a(t)$，則 $F_t(x)=a(x)/a(t)$，$0\leqslant x\leqslant t$。

舉一例子來看，假設某購物中心有一個很大的收費停車場，進出口各有一個，若設進入此停車場的車子大致遵循一個波松過程 $\{A(t), t\geqslant 0\}$，且 $\mathrm{E}(A(t))=a(t)$，$t\geqslant 0$，我們考慮爲非齊性的情況，因不同的時間車子的密度可能不一樣。顧客停車後，進入購物中心，過了一陣子出來，開車經收費口而離去，設顧客所停留的時間皆互相獨立，且有相同的分佈，其分佈函數設爲 $G(y)$（當然 $G(y)=0$，若 $y\leqslant 0$），即若 Y 爲所停留的時間則 $P(Y\leqslant y)=G(y)$。收費口有位老先生，長期的觀察下來，發現出去的那個過程，竟然也是一個波松過程。這並非偶然，可以如下地證明（不妨假設此停車場的容量爲無限大）。

設 $D(t)$ 表至時間 t 已離去顧客的總數，在等待理論裏 $\{D(t), t\geqslant 0\}$ 即稱爲離去過程（departure process），又設 $N(t)$ 爲至時間 t 仍未離去的顧客數，明顯地 $N(t)+D(t)=A(t)$。設 $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n$ 爲任意給定的 n 個點。

設某顧客在時間 s（$\leqslant t$）抵達此停車場，則 $G(t_i-s)-G(t_{i-1}-s)$ 爲此顧客會在時區〔t_{i-1}, t_i〕中離去的機率，而 $1-G(t-s)$ 爲此顧客至時間 t 仍未離去的機率。給定 $A(t)=k$，如前令 S_j 表第 j 個到達之時刻，而 Y_j 表第 j 個顧客停留的時間。由假設 $Y_1, \cdots\cdots Y_k$ 爲獨立且有相同的分佈函數 $G(y)$，且由順序統計量之性質知 $S_1, \cdots\cdots, S_k$ 之聯合（joint）分佈與某 k 個隨機變數 $X_1, \cdots\cdots, X_k$ 之順序統計量的聯合分佈相同，其中 X_j，$j=1, \cdots\cdots, k$ 相互獨立且 $P(X_j\leqslant x)=a(x)/a(t)$，$x\in$〔$0, t$〕。由於 X_j+Y_j，$j=1, \cdots\cdots, k$ 亦相互獨立，故

$$\begin{aligned}N(t)&=\#\{S_j+Y_j>t, j=1, \cdots, k\}\\&=\#\{X_j+Y_j>t, j=1, \cdots, k\}\\&=\sum_{j=1}^{k} I(X_j+Y_j>t),\end{aligned}$$

其中"#"表個數，$I(\cdot)$ 爲指示函數（indicator function），即

$$I(A)=\begin{cases}1\text{，若}A\text{成立，}\\ 0\text{，若}A\text{不成立。}\end{cases}$$

同理

$$D(t_i)-D(t_{i-1})=\sum_{j=1}^{k} I(t_{i-1}<X_j+Y_j\leqslant t_i),\ i=1,\cdots\cdots,n\text{。}$$

故在給定$A(t)=k$，$S_j=s_j$，$j=1,\cdots\cdots$，k之條件下，隨機變數$N(t)$，$\{D(t_i)-D(t_{i-1})$，$i=1,\cdots\cdots,n\}$ 之聯合母函數爲

$$(13)\quad \mathrm{E}(u^{N(t)}\prod_{i=1}^{n} v_i^{D(t_i)-D(t_{i-1})})$$
$$=\mathrm{E}(u^{\sum_{j=1}^{k} I(X_j+Y_j>t)}\cdot\prod_{i=1}^{n} v_i^{\sum_{j=1}^{k} I(t_{i-1}<X_j+Y_j\leqslant t_i)})$$
$$=\prod_{j=1}^{k}\mathrm{E}(u^{I(X_j+Y_j>t)}\cdot\prod_{i=1}^{n} v_i^{I(t_{i-1}<X_j+Y_j\leqslant t_i)})$$
$$=\prod_{j=1}^{k}((1-G(t-s_j))u+\sum_{i=1}^{n}(G(t_i-s_j)-G(t_{i-1}-s_j))v_i),$$

$|u|\leqslant 1$，$|v_i|\leqslant 1$，$i=1,\cdots\cdots,n$。上面最後一個等式是用到多項（multinomial）分佈之母函數的公式。對S_j，$j=1,\cdots\cdots,k$ 取期望值得

$$(14)\quad \mathrm{E}(u^{N(t)}\prod_{i=1}^{n} v_i^{D(t_i)-D(t_{i-1})}|A(t)=k)$$
$$=[\frac{1}{a(t)}u\int_0^t(1-G(t-s))da(s)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a(t)}v_i\int_0^t(G(t_i-s)-G(t_{i-1}-s))da(s)]^k,$$

由此再對$A(t)$ 取期望值，得

$$(15)\quad \mathrm{E}(u^{N(t)}\prod_{i=1}^{n} v_i^{D(t_i)-D(t_{i-1})})$$
$$=e^{-(a(t)-u\int_0^t(1-G(t-s))da(s)-\sum_{i=1}^{n} v_i\int_0^t(G(t_i-s)-G(t_{i-1}-s))da(s))}$$
$$=e^{-(1-u)\int_0^t(1-G(t-s))da(s)}\cdot\prod_{i=1}^{n} e^{-(1-v_i)\int_0^t(G(t_i-s)-G(t_{i-1}-s))da(s)},$$

這裏我們用到若隨機變數Z 有參數爲λ之波松分佈，則其母函數爲

$$(16)\quad \mathrm{E}(u^Z)=e^{-\lambda(1-u)},\ |u|\leqslant 1\text{。}$$

此即證出$N(t)$，$D(t_1)$，$D(t_2)-D(t_1)$，⋯⋯$D(t)-D(t_{n-1})$ 相互獨立，各有波松分佈且在時間t之期望值分別爲

$$(17)\quad \int_0^t(1-G(t-s)da(s),$$
$$\int_0^t(G(t_i-s)-G(t_{i-1}-s))da(s),$$
$$i=1,\cdots,n\text{。}$$

因此$\{D(t),\ t\geqslant 0\}$ 爲一波松過程且

$$(18)\quad \mathrm{E}(D(t))=\int_0^t G(t-s)da(s)$$

而且$N(t)$ 與離去過程$\{D(s),\ s\leqslant t\}$ 獨立，這也是一個奇妙的結果，因爲$N(t)$ 與$D(t)$ 的和爲$A(t)$。

波松過程尚有許多很好的性質及美妙的結果，有興趣的讀者可參考一般隨機過程的書（如Karlin（註6））。

參考文獻

1. Cinlar, E. *Introduction to stochastic Processes*, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1975.
2. Moran, P.A.P., *A Non-Markovian Quasi-Poisson Process*, studia Sci. Math. Hung, 2, 425-429, 1967.

3. Kruskal, W. H. and Tanur, J. M, *International Encyclopedia of statistics*, The Free Press, Vol 2, p 705, 1978.

4. Hillier, F. and Lieberman, G. J., *Introduction to Operations Research*, 4th Edition, Holden-Day, Inc., 1986.

5. 孫自健，石仲拓，談談卜松過程，數學傳播第二卷第三期，民國67年。

6. Karlin, S. and Taylor, H. M., *A First Course in Stochastic Proresses*, 2nd ed. Academic Press, New York, 1975.

—本文作者任教於國立中山大學應用數學研究所—