E0006 高二、高三、大一的程度

試證$f(x)=\cos x+\sin\sqrt{2}x, \forall x\in R$, 不爲週期函數。

（中山女中　郭正義老師提供）

取自: (1)研究實驗數學（King）第三册 p.2-39, 例 21（韓憶航執筆, 明山書局）。(2) 高中優等數學第三册 p.5-88 範例12（劉輝福編（東華本）, 南一書局）, (3)一流數學（全）p.74 例 12 (4)類題——S. M. S. G. Calculus, Part I. p.306, 6-(c)……等等。

無疑的, 本題屬於「熱門題目」, 對高二學生而言, 已嫌過難; 可是卻散見於各類參考書中; 最糟的是, 各書所附

解法都相同，但一律都語焉不詳、輕輕帶過。我們絕不以提倡難題或雜題爲目的，但這類題目及其誤解既已紛紛出籠，弄得學生或被其所誤或不知所從，我們覺得，有義務出來加以澄清，其實這亦正是「綜合雜題」這一欄成立的宗旨。且看第一個出處上原來的「證法」:

【誤證】 若 f 爲週期函數（週期爲 p），則

$$\forall x\in R,\quad \cos(x+p)+\sin\sqrt{2}(x+p)$$
$$=\cos x+\sin\sqrt{2}x$$

令 $x=0$，π，$-\pi$ 分別代入上式，得

$$\cos 0+\sin\sqrt{2}\cdot 0=1+0=1$$
$$\cos\pi+\sin\sqrt{2}\pi=-1$$
$$\cos(-\pi)+\sin\sqrt{2}(-\pi)=-1$$

故 f 不爲週期函數。

上邊推論不知是從何處得來? 最奇怪的是每本參考書上都是用同樣的證法（以 $x=0,\pi,-\pi$ 代入），且讓我們另行證明如下。

【證明】 假設 f 爲週期函數，則必有正數 p 使

$$f(x+p)=f(x),\qquad x\in R$$

因爲 $f(x)=\cos x+\sin\sqrt{2}x$ 的組成中，用到了 $\cos x$ 及 $\sin x$ 二函數，而此二函數又以在 $x=0$ 處之值最易求，故我們從觀察 $f(0)$ 的值來著手。

既然 f 以 p 爲其一週期，所以

$$f(-p)=f(0)=f(p)$$

$$\text{又}\begin{cases} f(0)=\cos 0+\sin\sqrt{2}\cdot 0=1\\ f(p)=\cos p+\sin\sqrt{2}p\\ f(-p)=\cos p-\sin\sqrt{2}p\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\cos p+\sin\sqrt{2}p=1\\ \cos p+\sin\sqrt{2}p=\cos p-\sin\sqrt{2}p\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\sin\sqrt{2}p=0\\ \cos p=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}p=n\pi\\ p=2m\pi\end{cases};m,n\in N$$

$$\Longrightarrow\sqrt{2}=n/2m\in Q\Longrightarrow\text{矛盾。}$$

故 f 不爲週期函數。

【討論】

1, 當然證法不祇上述一種，你將 $x=0$，p，$2p$ 分別代入 $f(x)$ 中，或者如參考書上所作將 $x=0$，π，$-\pi$ 各代入 $f(x+p)=f(x)$ 的式子中都可歸結於矛盾而得證，但證法不會比這更簡單。（歡迎讀者提供更簡明的證法.）

2. 以上證法中，歸結於矛盾的關鍵何在? 乃在於 $\sqrt{2}p/p\notin Q$；所以，你可能會猜想: 凡是形如 $f(x)=\cos hx+\sin kx$，其中 $h/k\notin Q$ 的函數都不是週期函數，並試圖找出一個判定週期函數的和是否仍爲週期函數的準則。我們所得的結果如下:

> **準則** 令 $a,b,h,k\in R$; $h,k\neq 0$，定義函數 $f(x)=a\cos hx+b\sin kx$, $\forall x\in R$，則 $f(x)$ 爲週期函數的充要條件爲 $h/k\in Q$。

這個證明留給讀者去完成（你可以仿照 $f(x)=\cos x+\sin\sqrt{2}x$ 時的證法.）並列入徵答（對高中學生）。

……………………………………………………問 (E0006-1)

3. 問 (E0006-2) 試判定下列各函數何者爲週期函數? 是的話，其最小正週期若干? 又何者非週期函數? （π表圓周率）

(1) $\sin x+\cos\sqrt{2}x$

(2) $\cos\sqrt{3}x-\sin x$

(3) $\pi\cos\sqrt{2}x+\pi^2\sin 2\sqrt{2}x$

(4) $3\cos\pi x-2\sin\pi^2 x$

(5) $\cos\sqrt[3]{5}x-\sin\sqrt[3]{5^4}x$

(6) $\cos\sqrt[3]{5}x+\sin\sqrt{5}x$

4. 承 2.，若 $0\neq h/k\in Q$，必存在 $m,n\in N$ 使，$|h/k|=m/n$，但 $\cos hx$，$\sin kx$ 之週期比爲 $2\pi/|h|:2\pi/|k|=|k|:|h|=n:m$; 所以，你大概又可以猜到：假設兩個週期函數 $f(x),g(x)$，各有最小正週期 p 及 q，若 $p:q$ 可化爲簡單整數比，則 $f(x)+g(x)$ 亦必爲週期函數。事實上，你很容易證得（可參考本期「資料類」中「週期函數」一文之定理 6.）:

定理 若 f,g,p,q 如上所述，$a,b\in R$ 則 $a\cdot f\pm b\cdot g$，$f\cdot g$，f/g 亦都是週期函數。或更一般地，若 $f_1,f_2,\cdots\cdots,f_n$ 皆爲定義於 R 的函數，各擁有基本週期（卽最小正週期）$p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n$，若存在 $m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n\in N$ 使 $p_1:p_2:\cdots\cdots:p_n=m_1:m_2:\cdots\cdots:m_n$，則函數

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x),\ \forall x\in R\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

必爲一週期函數，且 $p=p_1[m_1,\cdots\cdots,m_n]/m_1=p_2[m_1,\cdots\cdots,m_n]/m_2=\cdots\cdots=p_n[m_1,,m_n]/m_n$ 爲 f 之一（不一定爲基本）週期。

5. 問 E0006-3 (對象: 學過微積分的學生)

考慮上述各命題之逆，卽各 f_i 之週期 p_i 能化成簡單整數比是否爲其和 $f=\sum f_i$ 成週期函數的一個必要條件? 如不是應如何修正? 試找出一個類似E0006－1的準則來。

6. 問(E0006-4) (對象: 學過微積分的學生)

上述問題當 $n\longrightarrow\infty$ 時又如何? 卽在 4. 之(1)

式中，若

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)=f(x) \quad (\text{一致收斂，在} T\subset R \text{上})$$

時，則又如何？

7. 在自然界中亦有類似的對應現象：音樂上古典和聲學上所謂諧和音，便是指兩個音波(相當於兩個函數曲線)，如果波長（相當於函數的週期）成簡單整數比，其合成波便是諧和的（相當於二函數的和仍爲一週期函數）；否則合成波（相當於函數的和）奇形古怪，忽高忽低，便是不諧和了。

8. 考慮過週期函數和的性質後，**不訪再想想**：假如你現在有一個週期函數（可能很古怪），你是否能把它拆解成一些我們通常較熟悉的週期函數（如 $\sin nx$, $\cos nx$）的和呢？事實上，這是可以做得到的，祇要 $f(x)$ 在一週期內沒有無限多的局部極大與極小（亦卽不能無限次的上下振動），在每一點 $x_0\in R$ 的單邊極限值 $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在且有限，則 $f(x)$ 必可如下拆解：（暫時假設 $f(x)$ 的週期爲 2π）。

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx),$$

$$a_i, b_i\in R, \forall i$$

這就是所謂的 $f(x)$ 的富氏級數（Fourier Series）展開法，上式右端顯然以 2π 爲其一週期。如果 $f(x)$ 的週期不爲 2π 呢？假設 p 爲其一正週期，令 $g(x)=f(px/2\pi)$ 則 g 以 2π 爲一週期，故必可如上拆解，再把 $f(x)=g(2\pi x/p)$ 代入 g 之拆解式中卽可。讀者若有進一步的興趣，可參閱富氏分析或調和分析(Harmonic Analysis)方面的書籍，當可獲得更進一層的瞭解。

（編輯部 C. Y. & Y. W.）