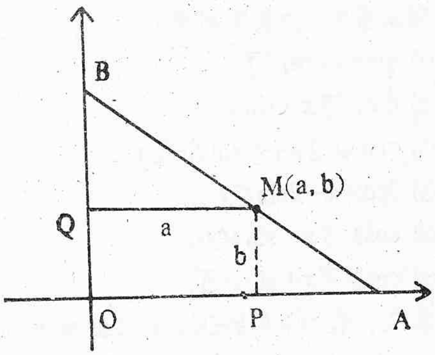
E0005 高二、高三的程度

令 $M(a,b)$ 表坐標平面上第一象限內部一點，求作一直線 L 與兩軸的正半軸所圍出的三角形面積爲最小，並求此最小面積之值？

（北一女 潘振輝老師提供）

【分析及解答】

(1) 如圖設直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 卽爲所求之直線其分別交座標軸之正向於 A, B。因過已知點 M，故該直線由其斜率 m 所決定。又因其交座標軸之正軸故 $m<0$。



(2) 過 M 分別對直線 $\overleftrightarrow{OA}$，$\overleftrightarrow{OB}$ 做垂線分別交 $\overleftrightarrow{OA}$，$\overleftrightarrow{OB}$ 於 P, Q，則四邊形 $OPMQ$ 成一矩形，且 $MP=b$，$MQ=a$。矩形 $OPMQ$ 之面積爲 ab（爲一常數），故欲 $\triangle OAB$ 之面積爲最小， 卽要求 $\triangle MPA$ 及 $\triangle MQB$ 之面積和 c 爲最小卽可。

(3) 但

$$\frac{MP}{PA}=-m,\quad \frac{BQ}{MQ}=-m,$$

故

$$PA=-b/m,\quad BQ=-ma,$$

因此

$$\begin{aligned} c &=\frac{1}{2}MP\cdot PA+\frac{1}{2}MQ\cdot BQ \\ &=\frac{1}{2}\left(-\frac{b^2}{m}-ma^2\right) \\ &\geq\sqrt{\frac{b^2}{-m}\cdot(-m)\cdot a^2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{算術平均數不小}\\ \text{於幾何平均數}\end{array}\right) \\ &=ab \end{aligned}$$

卽 $c\geq ab$，且 $c=ab$ 的條件爲

$$\frac{b^2}{-m}=(-m)\cdot a^2$$

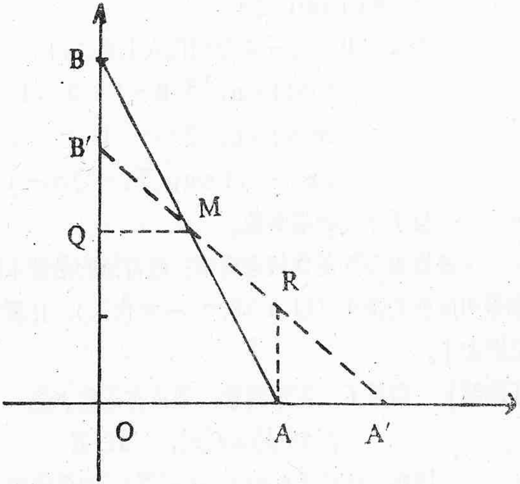
亦卽 $m=-b/a$ 時 c 取最小值 ab，故 $\triangle OAB$ 之最小面積爲 $ab+c=2ab$

（編輯部 $C.Y.$）

此題亦可以平面幾何之方法求得，今略述如下，讀者有興趣可試試看：

取 $OB=2b$，連 $\overleftrightarrow{BM}$ 交 x-軸於 A，利用「相似三角形三對應邊成比例」知：

$$OA=2QM$$
$$BA=2BM$$
$$OB=2BQ$$



故 $OA=2a$，M為 $\overline{AB}$ 之中點。

今任意過 M 之一直線若其交二座標軸之正向分別於 A'，B'，則可證明 $\triangle O'A'B'$ 之面積大於 $\triangle OAB$之面積。（依次分 B'介於 O，B之間或B介於 O，B'之間來討論，如果像上圖 B' 介於O，B之間，則可過A做 $\overline{OB}$ 之平行線交 $\overline{A'B'}$ 於R，則 $\triangle BMB'\cong\triangle AMR$，而得到證明。）

（附中 吳富藏老師提供）