E0004 高二、高三的程度

假設現有 n 條線段, 其長度分別為 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 公寸 ($n \geq 4$), 現任取其中四條, 問可作一個圓外切四邊形之方法有幾?

(成功高中 龔啓雄老師提供
取自Hall & Knight: 高等代數)

【分析】1. 由題問可猜得: 「一個四邊形是否有內切圓必與其各邊長之間的關係有密切關連。」事實上, 一個四邊形有內切圓的充要條件是它的兩雙對邊和相等。(證明可參看國中數學課本第五册第 134 頁)

2. 「任給四個長度, 它們可以構成一個四邊形的充要條件是其中任三個長的和大於第四個的長」, 「任給四個長度, 若它們可分成和相等的兩對, 則必可用此四長度作一四邊形」; 這兩點請讀者自證。

3. 由 1. 2. 知所給問題可轉化為「由 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 中任取四 (相異) 數, 使其中二數的和等於另外二數的和的取法有幾? 」

【解】 假設 a, b, c, d 為所取的四數滿足分析 3 中所講的條件, 且 $a < b < c < d$, 則必然

$$a + d = b + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

先假設 a, d 固定, 剩下的問題就是 b 和 c 的取法有幾了; b, c 必須從 a, d 之間選取且滿足(1)式, 而 a, d 之間有 $d-a-1$ 個自然數, 所以這種取法應有 $\left[\dfrac{d-a-1}{2}\right]$ 種, ([ ] 表高斯符號)。

再看 a 和 d 的取法, 顯然

$$\begin{cases} 1 \leq a \leq d-3 \\ 4 \leq d \leq n \end{cases}$$

所以, 合所需的取法共

$$P(n) = \sum_{d=4}^{n} \sum_{a=1}^{d-3} \left[\frac{d-a-1}{2}\right] \text{種} \cdots\cdots\cdots(2)$$

計算 $P(n)$ 時須利用以下三性質: (請自證)

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \frac{1+(-1)^n}{2}$

(ii) $\left[\dfrac{n}{2}\right]=\begin{cases} n/2, & n 為偶數 \\ (n-1)/2, & n 為奇數 \end{cases}$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1+(-1)^{n+1}}{4}$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

現在開始計算 $P(n)$：

$$P(n)=\sum_{d=4}^{n}\sum_{a=1}^{d-3}\left[\frac{d-a-1}{2}\right]$$

$$=\sum_{d=4}^{n}\sum_{a=1}^{d-3}\left\{\frac{d-a-1}{2}-\frac{1+(-1)^{d-a}}{4}\right\}$$

$$=\sum_{d=4}^{n}\sum_{a=1}^{d-3}\left\{\frac{2d-3}{4}-\frac{a}{2}-\frac{(-1)^{d-a}}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{d=4}^{n}\left\{(2d-3)(d-3)-2\cdot\frac{(d-3)(d-2)}{2}+\frac{1+(-1)^{d}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{d=4}^{n}(d-3)(d-1)\right\}+\frac{1}{8}(n-3)+\frac{1}{8}\sum_{d=4}^{n}(-1)^{d}$$

$$=\frac{1}{24}\{(n-3)(n-2)(2n+1)+3(n-3)\}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1+(-1)^{n}}{2}$$

$$=\frac{1}{48}\{2(n-1)(n-3)(2n-1)+3(1+(-1)^{n})\}$$

…………………………………………………答

$$\left(或=\begin{cases}\frac{1}{24}(n-1)(n-3)(2n-1), & n 奇數時\\ \frac{1}{24}\{(n-1)(n-3)(2n-1)+3\}, & n 偶數時\end{cases}\right)$$

（編輯部 C. Y.）

問1 (E0004-1)試說明本問題亦可轉化爲：求下列不等式

$$x+2y+z\leq n,\quad 4\leq n\in N$$

的自然數解 (x, y, z) 有幾組?

問2 (E0004-2) 從各標有數字 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 的 n 枝籤中，任取其中三枝，問其上標號能成一等差數列的概率若干? （提示：可仿上利用高斯函數解之。）

（編輯部 Y. W.）