E0003 高一到大一的程度

〔題 1〕滿足7^n整除1234!之最大自然數n之值爲何?

〔分析及解答〕:

換言之，這等於是求在 1234! 的質因數連乘積分解式

(1) $1234! = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots\cdots P_K$,　　P_i，正質數，$\forall i$

中，7 共出現了多少次?

在 $1234! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots\cdots \times 1234$ 的諸因數中共有〔1234/7〕=176 個 7^3 的倍數，〔$1234/7^2$〕=25 個 7^2 的倍數，〔$1234/7^3$〕= 3 個 7^3 的倍數，沒有 $7^m (m \geq 4)$ 的倍數 (因 $7^4 > 1234$); 而這當中每一個 7 的倍數就對應於 7 在(1)式右端的一次出現，7^2 的倍數則對應於兩次的出現，7^3 倍數$\longleftrightarrow$三次出現……等等; 所以 7 在(1)式右端共出現了

$$176 + 25 + 3 = 204 \text{次}$$

這就是滿足 $7^n | 1234!$ 的最大整數n的值了。

(景女 王建江老師提供)

〔題2〕滿足 $72^n|100!$ 的最大自然數 n 爲何值?

〔易犯的誤解〕: $72^n=8^n\cdot 9^n$，令滿足 $8^n|100!$ 及 $9^n|100!$ 的自然數 n 的最大值各爲 n_1 及 n_2，則因 $(8,9)=1$，故 $(8^{n_1},9^{n_2})=1$，所以

$$8^{n_1}\cdot 9^{n_2}|100!$$

令 $n_0=\min(n_1,n_2)$，則 $72^{n_0}=8^{n_0}\cdot 9^{n_0}|100!$

所以 n_0 卽爲所求; 而

$$n_1=[100/8]+[100/8^2]=12+1=13$$

$$n_2=[100/9]+[100/9^2]=11+1=12$$

$n_0=\min(13,12)=12.$ ……………………答

※請讀者自行指出錯誤何在?

（編輯部 Y. W.）

〔正解〕: $72=2^3\cdot 3^2$，令滿足 $2^n|100!$ 及 $3^n|100!$ 的自然數 n 的最大值各爲 n_1 及 n_2，則必存在 $l\in N$ 使

$$100!=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot l$$

$$(l,2)=(l,3)=1$$

因爲 72 是由 '3' 個 2 和 '2' 個 3 乘在一起而得，所以若令 $n_0=\min([n_1/3],[n_2/2])$，則 n_0 卽爲所求（爲什麼?）; 而

$$n_1=[100/2]+[100/2^2]+\cdots+[100/2^6]=97$$

$$n_2=[100/3]+[100/3^2]+\cdots+[100/3^4]=48$$

$$n_0=\min([97/3],[48/2])=\min(32,24)=24$$

答: $n=24$ 爲所求。

（編輯部 C. Y.）

問1 (E0003-1) 將〔題2〕一般化，卽求滿足 $a^n|m!$ 的最大 n 值，其中各數皆爲自然數; a, m 爲定數，n 可變動，$a>1$。

〔提示: 將 a 分解爲 $a=P_1^{e_1}\cdot P_2^{e_2}\cdots\cdots P_k^{e_k}$，其中 $P_1<P_2<\cdots\cdots<p_k$ 皆爲正質數，$e_1,e_2,\cdots\cdots,e_k\in N$，然後仿照〔題2〕的正解求之。〕

（編輯部 C. Y.）

問2 (E0003-2) 同上，但將 $m!$ 改爲 $r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdots(r-(s-1))$，其中 $r,s\in N$ 且 $r>s$。（※此數常記爲 $P(r,s)$）

（編輯部 C. Y.）

問3 (E0003-3) $n!$ 的末尾含有多少個0?($n\in N$)

（編輯部 Y. W.）

問4 (E0003-4) $P(n,m)=n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-(m-1))$ 的末尾又有多少個 0? $(n,m\in N, n>m)$

(編輯部 $Y.W.$)