E0002 高二到大一的程度

說明： 本題的目的在說明：解決數論上有關整除的問題常可利用「組合法」解之，亦就是應用一點排列、組合的觀念上去，尤其是當所給的數值很大時；例如說，當你想證明

$$(n!)^{n+1} \mid (n^2)!, \quad n \in N \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

時，若依常例用數學歸納法證明，實不容易（讀者可試證之）；此外，似乎又別無良計可施，這時「組合法」就可派上用場了。

示例 1. 證明任意 n 個連續自然數的乘積必爲 $n!$ 的倍數。

解 假定此 n 個自然數爲

$$r+1,\ r+2,\cdots\cdots r+n, \quad r \geq 0$$

則其連乘積卽

$$(r+1)\cdot(r+2)\cdots\cdots(r+n) = P(r+n, n) = C(r+n, n)\cdot n!$$

故可被 $n!$ 整除。〔上式中 $P(r+n,n)$ 及 $C(r+n,n)$ 各表從 $r+n$ 個相異事物中取 n 個的排列法和組合法。〕

定理 1. 將 n 個相異事物分爲 k 組，每組的個數各爲 n_1, n_2, ……, n_k 個的分法（過常叫無序分割法）有

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_k!\cdot k!} \text{種} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其中 $n_i > 0, \forall i$; $\quad n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k = n$

它的證明教本上都有，我們不再重述。

推論 1. 將 $m\cdot k$ 個相異事物等分爲 m 組，使每組恰含 k 個的分法有

$$\frac{(mk)!}{(k!)^m\cdot m!} \text{種} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

示例 2. 證明文首所提到的(1)式。

證明 考慮 n^2 個相異事物等分爲 n 組，每組 n 個的分法，亦即以 $m=k=n$ 代入(3)式，故分法應有

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^n\cdot n!} = \frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} \text{種。}$$

換言之，(1)式已得證。

（以上由編輯部 $M. C.$ 提供）

請讀者仿照以上的方法作底下的問題。

問1 (E0002-1) 設 n 爲正整數，p 爲質數，$n = p^k\cdot t$, k 爲自然數且 $(p, t) = 1$ （p, t 互質），則

$p^{k-m} \mid C(p^m, n), m=1, 2, \cdots\cdots, k$
$p^{k-m+1} \nmid C(p^m, n)$（$\nmid$: 不整除之意）

（成功中學 龔啓雄老師提供）

問2 (E0002-2)（此題稍難）設 n 爲大於 1 之正整數，試證

$$(n!)^{n-1}\Big|^{n^n-1}(n^n)!$$

（編輯部 $M.C.$）

問3 (E0002-3) 證明

$(n!)^{(n-1)!}\cdot((n-1)!)!$ 整除 $(n!)!$
且 $[((n-1)!)!]^n$ 整除 $(n!-1)!$

（編輯部 $Y.W.$）

問4 (E0002-4) 有一算術數列其首項、公差皆爲整數，若其公差與 $n!$ 互質，則此數列中任意連續 n 項的乘積必爲 $n!$ 的倍數。

（編輯部 $Y.W.$）