E0001 大一、大二、高中的程度

對於下邊兩個論據，請辨其是非，並加嚴格澄釋:

(1) 設

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2 \quad (x>0)$$

則 $x^2=2$，故 $x=\pm\sqrt{2}$，按規定 x 取正值，得

$$x=\sqrt{2}$$

(2) 設

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4 \qquad (x>0)$$

則 $x^4=4$，故 $x^2=\pm 2$，按規定 x 取正值，得

$$x=\sqrt{2}$$

(建中 林瑞雄老師提供)

在下面的〔解〕中，我們一邊澄清這個問題，一邊又提出新問題，請讀者作答。

〔說明〕解說本題的用意不在強調題目本身有多重要。事實上，取這個題目只因它流傳已久。這裡我們藉這題目來澄清「極限」的概念，同時說明，處理或澄清一個問題時，以個案或集案的手法來考慮，在效果上有何差距。譬如說，在底下的〔解〕中，將原來考慮的問題 $x^{x^{x}}=2$ 或 4 推及 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=y$ 的一般場合，反使問題趨於明朗，同時對於後者，我們可引入函數，加以圖解。這類「一般化」的方法（不同於平日所指的公理化或抽象化意味下的 generalization)，其實早已隱伏在大、中、小學的課程之中（參見「數學教室」下卷「高中數學課程內容的來龍與去脈」），甚至在由「直線」推及「直線族」的過程中亦可看出「一般化」方法的痕跡。下期我們又要介紹「特殊化」的方法。

【解】(i)題目的意思是什麼？當一個人說

$$\alpha^{\alpha^{\alpha}}\quad；其中\alpha為正實數。$$

他指的是什麼？根據提問者接下來的討論，顯然他指的是下列數列 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots\}$ 的極限，

$$a_1=\alpha,\ a_2=\alpha^{\alpha},\ a_3=\alpha^{(\alpha^{\alpha})},\cdots\cdots$$

亦即

$$a_n=\alpha^{a_{n-1}},\quad n=2,3,4,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

【此地

$$a_n=\alpha^{\left(\alpha^{\left(\alpha^{\cdot^{\cdot^{\left(\alpha^{\alpha}\right)}}}\right)}\right)}$$

若改以考慮

$$a_n=\left(\left(\left(\alpha^{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)^{\alpha}$$

則完全變成另一回事了，注意

$$2^{\left(2^{\left(2^{2}\right)}\right)}=2^{(2^4)}=2^{16}$$

$$\nparallel$$

$$\left(\left(2^2\right)^2\right)^2=\left(2^4\right)^2=2^8$$

兩值並不相等。】

(ii)題目

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其實是要找出 α，使 (1)中

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，(設為 β)

(B) $\beta=2$

(C) 有幾個這樣滿足 (A), (B) 的 α？

我們先來看 (C)，如果有某 α 使得

$\lim a_n$ 存在且等於 2

則由 (1) 式

$$a_n=\alpha^{a_{n-1}}$$

取極限後得

$$\lim a_n=\lim \alpha^{a_{n-1}}=\alpha^{\lim a_{n-1}}$$

故

$$2=\alpha^2$$

得

$$\alpha=\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

知 (2) 若有解，則唯一。且其解必為 $\sqrt{2}$。

回頭來看 $\alpha=\sqrt{2}$ 時，$\lim a_n$ 是否存在？

注意

$$a_1=\sqrt{2}<2$$

$$a_2=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}<(\sqrt{2})^2=2$$

$$a_3=(\sqrt{2})^{a_2}<(\sqrt{2})^2=2$$

$$\vdots$$

$$a_n=(\sqrt{2})^{a_{n-1}}<(\sqrt{2})^2=2$$

故知 a_n 是有界的遞增(*)數列，其極限存在是不成問題了，如果這個極限只能等於 2 (**)，那麼方程式(2)唯一地有 $\sqrt{2}$ 這個解。

*問1 (E0001-1) 證明

$\sqrt{2},\sqrt{2}^{\sqrt{2}},\sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})},\cdots\cdots$，這個數列是遞增數列。

**問2 (E0001-2) 證明上述 a_n 的極限只能是 2 (提示 $\sqrt{2}^{\beta}=\beta$),

(iii)問題的一般化

現在我們來看

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

問

(A) 對於怎麼樣的正實數 x,

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

收斂?

(B) 對於什麼樣的 y, (4)式中 x 有解, 且 x 是什麼?

(C) 對於什麼樣的 y, (4) 式有唯一解 x?

問3 (E0001-3) 回答(A)。

問4 (E0001-4) 回答(B)。

問5 (E0001-5) 回答(C)。

〔**提示:** 顯然 (4) 式給出了 x 與 y 的一個函數關係。仿 (ii)中的討論知道: 對於有 x 解的 y, 可推得

$$x^y = y$$

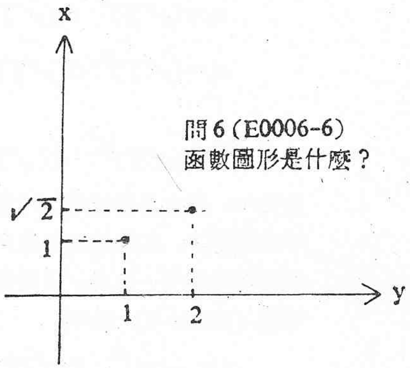
即

$$x = y^{1/y}$$

考慮

$$x = y^{1/y} \equiv f(y)$$

的函數圖形。



找其最大值, 從而討論問題 (A), (B), (C)〕

問7 (E0001-7) 嚴格解釋原來林瑞雄老師所提的矛盾論題。

(編輯部, *W. H.*)