B0008 高二的程度；初學、複習用

測驗內容：向量幾何。

設$\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(-4,2), B(1,3), C(-5,6)$, 求

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=?$
2. 令 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$之夾角為 θ，則$\sin\theta=?$
3. $\triangle ABC$ 的面積$=?$
4. $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$方向的投影量$=?$
5. $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向的投影$=?$
6. BC 邊上的中線長$=?$
7. $\triangle ABC$ 的外心 $T(x,y)=?$
   垂心 $H(x,y)=?$
8. $\triangle ABC$ 的內心 $I(x,y)=?$

〔**想法**：向量內積$\longrightarrow\cos\theta\longrightarrow\sin\theta\longrightarrow a\ \triangle ABC\longrightarrow$ 投影（量）〕

〔**提示**：7. $|\overrightarrow{TA}|=|\overrightarrow{TB}|=|\overrightarrow{TC}|\longrightarrow$求外心，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$\longrightarrow$求垂心〕

8. 求內心，以分角線法求則太繁，可利用下式：

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}.$$

此題可推廣到三度空間上，作法類似，僅在 7, 8 中求外心、內心、垂心時須再利用一條件，卽 T（或 H, I）與 A, B, C 三點共平面，亦卽 $\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共平面，亦卽

$$\begin{vmatrix} T_x-A_x & T_y-A_y & T_z-A_z \\ B_x-A_x & B_y-A_y & B_z-A_z \\ C_x-A_x & C_y-A_y & C_z-A_z \end{vmatrix}=0 \quad \text{〔註〕}$$

（或者說必存在 $x, y\in R$ 使 $\overrightarrow{AT}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$）

〔註〕T_x-A_x 表 $\overrightarrow{AT}$ 在 x 軸方向的分量，卽 $\overrightarrow{AT}=(T_x-A_x, T_y-A_y, T_z-A_z)$，餘同。