

測驗時數：40 分鐘。

測驗內容：主題是小數與分數間的轉化；牽涉的細目是：循環小數、分數與有理數、有限小數、整數的因數分解、通分，等比級數的求和、有理數系的代數運算，無理數系中運算的非閉鎖性。

- (1) 一個有理數便是一個分數 $\frac{b}{q}$ ，其中 p, q 各為整數，問是否任何循環小數都是有理數？_____ ①（是或否）；其中有限小數也當作循環小數來看待，因有限小數不妨當作“0”這個數字無限次重複（如 $2.53=2.53000\cdots=2.53\dot{0}$ ）。

(i) 將下列循環小數化成分數：

$$1.0\overline{38} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ②}$$

$$0.5\overline{15} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ③}$$

(ii) 一般化：

若有一循環小數 $A = a_0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_n}$

其中 a_0 為整數部份， $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$

為 0 到 9 的數字。

$$\text{則 } A = a_0 + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} + \frac{b_1b_2\cdots b_n}{999\cdots 99000\cdots 00}$$

其最後一項有幾個“9”？_____ ④ 有幾個“0”？_____ ⑤

(2) 反過來是否任何有理數都可以寫成循環小數? _____ ⑥ (是或否?)

(i) $\frac{24}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$ ⑦, $\frac{13}{27} = \underline{\hspace{2cm}}$ ⑧ $\frac{127}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ ⑨

(ii) 對於分母有 2 或 5 的因子, 可將分母先湊成 10 的指數

$$\frac{21}{2^3 \cdot 5^5} = \frac{2^2 \times 21}{2^5 \cdot 5^5} = \frac{2^2 \times 21}{10^5} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ⑩}$$

$$\frac{17}{3 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{5 \times 17}{3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{10^2} \left(\frac{5 \times 17}{3} \right) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ⑪}$$

(iii) 基於上一小題的想法, 問什麼時候一個分數 (設已化成最簡分數) 為有限小數? (求其充要條件) _____ ⑫。

(iv) 判別下列各分數何者可寫成有限小數? (選擇) _____。 ⑬

(A) $\frac{2736541}{350}$ (B) $\frac{63}{27}$ (C) $\frac{147}{168 \times 125}$

(D) $\frac{149}{21 \cdot 2^3 \cdot 5^2}$ (E) $\frac{56}{25^3}$

(v) (回家後, 再探討數線上所有十分點、二分點與五分點間的關係)

(3) 分數與分數和、差、積或商仍為分數, 故有理數之間作加減乘除都還是有理數, 試舉例說明這件事實。

如 $\frac{7}{6} + \frac{3}{5} = \frac{53}{30}$

$\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ ⑭}$

$\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ ⑮}$

$\underline{\hspace{1cm}} \div \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ ⑯}$

(4) 至於無理數與無理數相加或相減是否仍為無理數? _____ ⑰

設已知 $\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$ 為一無理數, 故它必為

(循環或非循環) _____ ⑱ 小數?

檢算下列兩個非循環小數的差

$$1.414213562373095 \dots - 0.516213562373095 \dots$$

[兩者小數第四位以下數字相同]

= _____ ⑲ 此為循環或非循環小數? _____ ⑳

又考慮

$$1.414213562373095 \dots + 8.585786437626904 \dots$$

[兩者關係是每相應的數字, 其和為 9, 如 $1 + 8 = 9$, $4 + 5 = 9$, $1 + 8 = 9$, $4 + 5 = 9$, $2 + 7 = 9$, \dots]

此和 = (寫成無限小數) ㉑, 能否化成有限小數? _____ ㉒

其值 = _____ ㉓?

兩個無理數相乘或相除是否仍為無理數? 請舉反例說明

㉔ $\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

㉕ $\underline{\hspace{1cm}} \div \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

說明 $\sqrt{5}$ 是無理數, 理由: _____ ㉖

同理可說明 $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ 也是無理數。問 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 是否仍為無理數?

_____ ㉗, 試加以說明: _____ ㉘。

(編輯部 W. H.)