A欄　方法整理——徵文徵答

本欄所指的「方法整理」已在下邊「解題方法的分類整理」一文中說明。這一期只有兩篇文章：「移位消去法」與「向量線性組合的方法」。前者屬於「(Ⅲ)常見於課文中，用來推證課程內容的方法」，後者屬於「(Ⅳ)課程中一些基礎內容利於多處應用的方法」(參見下文)。

這兩篇文章，登在這裡，可作爲投稿的參考。當然兩文對於同學的學習都十分有用。文中都帶有習題。請依號碼做下答案後，寄來本刊，下期公布答案，並刊登做答成績優良者的姓名，及予適當獎勵。

本　欄　細　目

解題方法的分類整理

——以移位消去法為例——

黃武雄

有一天，一位高二同學走進我的辦公室，說：「我讀了幾遍課文，考起試來卻一無是處！」

有一天，我接到一封信，一位學生寫道：「我們都支持你的說法，但不能同意你所說的『讀好書便可考好試』。」

有一天，我在一個會上，聽一位同學站起來指陳：「我們依規矩在課本內容下功夫的人，一到考試都吃了虧！」

當然，細讀課文卻考不好試，部份緣自考試題目與測驗方式本身的弊病；但很多學生熟讀課文，不會解題，則起因於「不見方法」。現時的教材是以內容來分類，而其表達方式則透過很多

數學的形式語言。下焉者，只看到數學的「形式」，一天到晚在斤斤計較名詞、符號與定義；中焉者，則意在內容，但看到的仍只是一些結果，充其量不過是一片片知識的堆積，他可以解釋「爲什麼這樣？」，但解釋不了「爲什麼這樣想？」

數學教育，如果要在求廣方面有一個長足的進步，必須適切地把它當作方法論來看待。今天，我們的教材把方法掩蓋在層層形式與內容之下。能從這些密密麻麻的亂枝雜葉中，抽出幾絲方法的人便是「領悟力高」的同學。由於前人不做「方法整理」的工作，年青朋友們悟性再高也要費盡很多心力浸淫多年，才能認識一點方法；至於其他的人，早早就被摒斥門外。

很多人領悟了一些方法，自己也一輩子說不出來什麼時候該使用這些方法？便草率將它稱爲「經驗」。於是有一天我聽到一位女生抱怨：「當我們問老師，你怎麼想得出來這樣做的，他的回答卻是兩個字——經驗！」。

「經驗」固然是要緊，但是我們須化繁爲簡，整理出「經驗」，使下一代易於吸收，然後才能創造新經驗，唯其這樣才叫做教育。

我們並不是在說：「要整理出一套死板的方法，像服侍公主般地端出來，叫他們記憶、消化，然後看他們一個個整整齊齊走到大街上，爲一件小事而張惶失措。」

我們該做的是把數學當做方法論。在大處談逼近法 (method of approximation)、轉化法 (method of translation)、局部化法 (method of localization) 等，在小處談配方法、待定參數法、移位消去法、差分法……等；使我們的學生，從大處學得課文全盤演繹的流向，從小處學得一些基本的解題技術。這些原都或明或暗存在於我們各支的數學內容之中，我們要一根根把它們抽出來，讓我們的學生重新咀嚼。我們相信，一個學生若讀書能注意去歸納出課文中所用的方法，分析它被使用的場合，他的解題能力自會隨着增強。

我們也相信，各校的教師若能提供他的經驗，整理方法。在「數學傳播」這塊園地中合力播種，我們的學生將會有很大的收獲。

逼近法、局部化法是分析學的基本方法。逼近法中建立模型的部份與轉化法，則爲高中課程的骨架〔註〕。這些從大處著眼的方法討論，曾散見於「數學教室」各期；本文只從小處著手，談些有關解題的方法。

我們先列一個細表，例說我們所謂的「方法」。大體上，我們分它爲四層：

（I）引導數學課程發展的方法：

如逼近法、局部化法、轉化法等。

（II）有關邏輯基礎的方法：

如歸納法（含 transfinite induction）、反證法、窮舉證法等。

（III）反覆用來推證課文內容的方法：

如移位消去法、待定參數法、配方法、積化和法、拆解法、擴充法、一般化法。圖形轉化法、差分法（微分法）、特殊化法等。

（IV）課程中一些基礎內容，利於多處應用的方法：

如餘式定理的用法、內積的用法、和角表示的用法、尤拉式的用法、以向量求交點的方法、線性組合的用法、均值定理的用法，……等。

本文先提出「移位消去法」作爲一個例子以供投稿先生的參考。祈盼藉此拋磚引玉。文中留有習題，列入徵答，希望讀者能實際提筆演練，過後相信有助於解題。

在起步之前，我們希望這些整理出來的方法，不致又僵化爲新的「模式」，我們所做的只是指出來「那些隱伏在課文內容中的方法怎麼用？」指出來「有些題目可以這樣去做」。但請認識這些方法的原始根源，保持它的質樸，將它們拿來靈活運用，不要又把它們看作是處理一些「定型」題目的死板工具。

〔註〕參見「數學教室」第六期「高中數學課程內容的來龍去脈」。

A0001（高中、大一）

§1　移位消去法

「移位消去法」常出現在有關級數與序列的一些問題之中，本質上它是爲求簡化而設法「消去」一長串未知物的法子。至於它消去的過程，則依賴「移位」：將一長串東西都一起移動一個位置。最典型易明的例子是

〔例 1〕等比級數的求和。

解　設

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n$$

$$r\cdot S_n=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+ar^{n+1}$$ 〔兩端乘以 r 而移位〕

然後兩式相減，（右端除首尾之外，一長串的　〔消去〕

$$ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n$$

都給消去了。）得

$$S_n-r\cdot S_n=a+0+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+0-a\cdot r^{n+1}$$

故整理得

$$S_n=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

以下，我們將用一系列的例子來說明「移位消去法」的使用情形。

§2　求和問題

【例 2】求 $1+2\cdot3+3\cdot9+4\cdot27+\cdots\cdots\cdots+(n+1)\cdot3^n$ 之和。

解　我們可加推廣，來考慮

$$A_n=1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots\cdots\cdots+(n+1)\cdot r^n$$

的一般情形

注意將 A_n 乘以 r 後，各項向右移位一步，相消之後，可歸於等比級數的求和。

$$\begin{aligned}
A_n&=1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot r^n\\
-)\ r\cdot A_n&=\qquad r+2\cdot r^2+\cdots\cdots+n\cdot r^n+(n+1)\cdot r^{n+1}\\
\hline
(1-r)\cdot A_n&=1+\ r+\ r^2+\cdots\cdots+\ r^n-(n+1)\cdot r^{n+1}\\
&=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ ①
\end{aligned}$$

而得

$$A_n=\frac{1-r^{n+1}}{(1-r)^2}-\frac{(n+1)\cdot r^{n+1}}{1-r}$$

故原問

$$1+2\cdot3+3\cdot9+\cdots\cdots+(n+1)\cdot3^n=\underline{\qquad\qquad}\ ②$$

習題 1（i）求$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\cdots\cdots+\frac{n+1}{5^{n+1}}$ ＿＿＿＿③

（ii）試用移位消去法求等差級數

$$a+(a+d)+(a+2\cdot d)+\cdots\cdots+(a+n\cdot d)$$

之和：＿＿＿④〔提示：要各項向右移一位，共須加上$(n+1)$個d；另外，請注意，通常等差級數的求和方法是將上式整個調過頭來（首尾互換）

$$D_n=a \quad +(a+ \quad d)+\cdots+(a+(n-1)\cdot d)+(a+n\cdot d)$$
$$D_n=(a+n\cdot d)+(a+(n-1)\cdot d+\cdots+(a+ \quad d)+a$$

然後兩式相加。這當然亦是一種移位消去法。〕

【例 3】 考慮級數

$$U_n\equiv 1+2+3+\cdots\cdots+n=n(n+1)/2 \text{〔等差級數〕}$$
$$V_n\equiv 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=?$$
$$W_n\equiv 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=?$$

U_n就是等差級數，其和從習題 1 中已經算出是$n\cdot(n+1)/2$，即項數n乘以各項平均$(n+1)/2$。

我們能否用「移位消去法」將 V_n 求出來？考慮

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-\quad n^3&=\quad 3\cdot n^2+\quad 3n+1 && \text{〔移位〕}\\
n^3-(n-1)^3&=3(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1 && \text{〔再移位〕}\\
(n-1)^3-(n-2)^3&=3(n-2)^2+3\cdot(n-2)+1 && \vdots\\
&\ \ \vdots\\
+)\quad 2^3-\quad 1^3&=\quad 3\cdot 1^2+\quad 3\cdot 1+1 && \vdots\\
\hline
(n+1)^3-\quad 1^3&=3\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\
&\quad +3\cdot(1+2+\cdots+n)+n \cdots\cdots\cdots\cdots && \text{〔消去〕}
\end{aligned}$$

故得

$$3\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)=(n+1)^3-n-1-3\cdot(1+2+\cdots+n)$$

整理後，得

$$V_n\equiv 1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

習題 2 求 $W_n\equiv 1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=$＿＿＿＿⑤

〔提示：考慮 $(n+1)^4-n^4$，然後「移位」，取和時「消去」4 次和部份〕

再推廣到一般項表示的拆合方面，我們可以利用上述 U_n, V_n, W_n 計算類如

（i）$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$

（ii）$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots+n)$

（iii）$1^2\cdot 1+2^2\cdot 3+3^2\cdot 5+\cdots\cdots$ 〔到第n項〕

的級數和；換句話說，一個級數若能展成

$$1+2+\cdots+n,\quad 1^2+2^2+\cdots+n^2,\quad \text{與}\quad 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

的組合，我們便能加以計算了。比如

【例 4】 求 $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$ 之和＝？

解 $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$

$=(2\cdot 1-1)^2+(2\cdot 2-1)^2+\cdots\cdots+(2\cdot n-1)^2$ 〔將一般項表成$(2k-1)^2$〕

$=(4\cdot1^2-4\cdot1+1)+(4\cdot2^2-4\cdot2+1)+\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots+(4\cdot n^2-4n+1)$ 〔將$(2k-1)^2$ 拆成 $4k^2-4k+1$〕

$=4\cdot(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-4\cdot(1+2+\cdots\cdots+n)$

$+\underbrace{(1+1+\cdots\cdots+1)}_{\text{加}n\text{次}}$ 〔重予組合，表成 n, U_n, V_n的式子〕

$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$=\frac{1}{3}(4n^3-n)$ 〔檢驗: $n=3$ 時, $1^2+3^2+5^2=35$; $\frac{1}{3}(4\cdot3^3-3)=35$〕

這方法若做熟了，可直接引入「取和」的符號

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

來表示將 $(2k-1)^2$ 加在一起，其中 k 的變動範圍是從 1 到 n，亦即

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\underset{\substack{\uparrow\\ k=1\text{時},\\(2k-1)^2=1^2,}}{1^2}+\underset{\substack{\uparrow\\ k=2\text{時},\\(2k-1)^2=3^2,}}{3^2}+5^2+\cdots\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ k=n\text{時}\\(2k-1)^2=(2n-1)^2}}{(2n-1)^2}$$

此時，對一般項直接計算如下:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}\{4k^2-4k+1\}$$

$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$ 〔尤須注意$\sum_{k=1}^{n}1=n$，因 1 加在一起"n"次〕

$$=4(1^2+2^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)+n$$

$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{1}{3}(4n^3-n)$$

這樣的計算比較簡潔且不易拆錯。

請讀者練習這種方法，求出

習題 3 (i) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots+n)=$ ________ ⑥

(ii) $1^2\cdot1+2^2\cdot3+3^2\cdot5+\cdots\cdots$ 〔到第 n 項〕$=$ ________ ⑦

§3 藉分解來移位消去

很多時候，對於一個級數的項，先加以分解，便可移位消去。最典型易明的例子，如

【例 5】考慮

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

若變成

$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$ 〔分解〕

$$\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$+)\quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

便可移位消去，而得

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

但如何知道這樣的拆法？拆的時候要考慮拆出來後能有移位的現象。這時或用一般項來分解反較便於思索，如在本例中，一般項為

$$\frac{1}{k(k+1)}$$

若將它拆開成

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

便知所分解出來的 $-\frac{1}{k+1}$ 已伸入右鄰 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 的範圍，與

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

中的首項 $1/(k+1)$ 可以消去。乃有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

習題 4 求下列級數

(i) $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\frac{3}{5^2\cdot 7^2}+\cdots\cdots$ 到第 n 項之和=____⑧

(ii) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots$ 到第 n 項之和=____⑨

〔提示：其一般項可作如下變化

$$\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\frac{1}{k(k+1)/2}=\frac{2}{k(k+1)}$$

然後再加分解以移位消去，而得和為 $2n/(n+1)$〕

【例 6】求 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\cdots$ 到第 n 項之和。

解 其一般項為

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\qquad〔預備消去\ k+1〕$$

$$=\frac{(k+1)}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

故

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

習題 5　(稍難，可不做)

求 $\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin 2x}+\dfrac{1}{\sin 2x\cdot\sin 3x}+\cdots$ 到第 n 項之和。＝______⑩

〔答案: $\dfrac{n\sin nx}{\sin^2 x\sin(n+1)x}$〕

作　業⑪

(景女　王賢友老師提供)

以「移位消去法」求下列各級數之和:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+1)(k+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{k(k+1)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$　　(4) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots$〔$n$項和〕

(5) $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots$〔$n$項和〕(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)}$ (8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

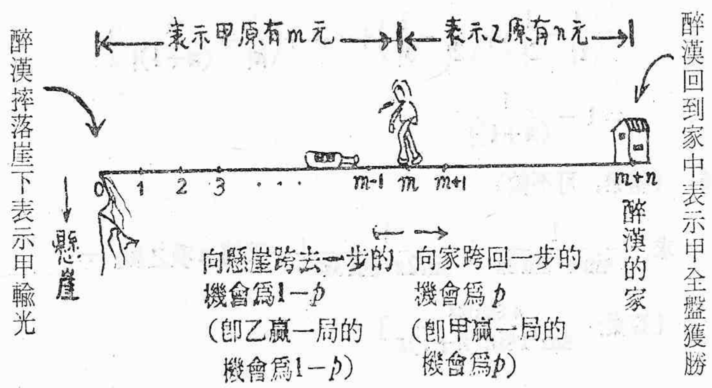
(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{k+2}}$，其中 a_n 表 $(1+2x)^n$ 展開式中 x^3 項之係數。

§4　差分問題

【問例 1】(輸光問題或醉步問題) 甲、乙兩人賭博，甲身上有m元，乙身上有n元；每賭完一局，輸方給勝方1元。若每局甲勝乙的機會(概率)為p，這樣一局局地賭下去，問甲全部輸光的機會多大？(規定不准借錢)

這個問題與下述「醉步問題」是同一回事，可一併處理:

有一醉漢，徘徊在他家與懸崖之間，（參見下圖）假設他家與懸崖相隔$m+n$步，而醉漢開始時正站在離懸崖m步的地方。假設他不停走動（跨步），每次向家中跨回一步的機會是p，而向懸崖跨近一步的機會是$1-p$，問醉漢落崖的機會若干？（規定回家後便被老婆禁足，不再覫出來了。）



【問例 1 的分析】：

假設醉漢開始站在離懸崖k步的地方，而摔落崖下的機會爲$f(k)$，那麼我們的目的便是要求出

$$f(m)$$

由所給規定知

$$\begin{cases} f(m+n)=0 & \text{〔若一開始便在家裏，落崖便沒機會〕} \\ f(0)=1 & \text{〔若一開始站在0處，就摔到崖下了〕} \end{cases}$$

想求$f(m)$，要先找出$f(k)$與$f(k-1)$，$f(k+1)$的關係來：

當醉漢站在h處，右跨一步之後，他落崖的機會是$f(k+1)$，左跨一步之後，他落崖的機會則爲$f(k-1)$；而右跨一步機會爲p，左跨一步機會爲$1-p$，故從k處出發，醉漢落崖的機會是

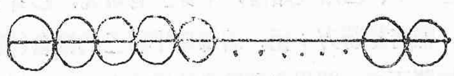
$$f(k)=pf(k+1)+(1-p)f(k-1)$$

於是〔問例 1〕便歸於所謂漸化式的問題：

> 對一個數列$\{a_0, a_1, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_{m+n}\}$，已知
>
> $$a_0=1, \quad a_{m+n}=0$$
>
> 及漸化式 $$a_{k+1}-\frac{1}{p}a_k+\frac{1-p}{p}a_{k-1}=0$$
>
> 求 $a_n=?$ 〔a_n 表上述 $f(n)$〕

現在我們再來看一個排列組合的問題，然後回來利用「移位消去法」求解漸化式。

【問例 2】 對於下列圖形

A  B〔n個圓環併在一起，首尾相接〕

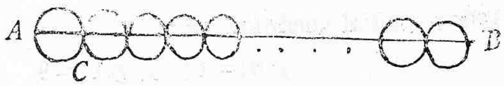
（i） 若由A至B做「一筆劃的走法」，卽每一弧線都恰好走過一次，有幾種走法？

(ii) 若由A至B每一弧線至多經過一次，有幾種走法？但不一定每條弧線都要通過，亦不一定取捷徑。

【問例 2 的分析】：

(i) 設 $f(n)$ 表示所求走法的個數，這個數當然因n而變，是n的函數，則將前圖中A，C間的部份擦掉，只留

時，所求走法應為 $f(n-1)$。我們要導出關於 $f(n)$ 與 $f(n-1)$〔也許還要牽涉到 $f(n-2)$〕的關係式，而變成漸化式的問題。看



(a) 自A出發經一弧線至C，有三種可能，故 $f(n)=3\cdot\{\quad\}$.

(b) 若此時即往回走，再回到C點來，有2種可能。接下來要到達B點. 便只有$f(n-1)$ 種走法，故共有$2\cdot f(n-1)$種走法。

(c) 若在(a)後，不往回走，而逕自向前，必然還要再回到C點。一旦來到C點後，又有二種可能去走遍第一個「圓環」${}_A\ominus_C$，然後再繼續它在C與B之間的旅程。因此走回第一個「圓環」${}_A\ominus_C$，實際上只是「插曲」，總共還是有 $2\cdot f(n-1)$個走法。

綜合上述 (a)～(c)，

得 $f(n)=3\cdot\{2\cdot f(n-1)+2\cdot f(n-1)\}$

即 $f(n)=(3!)\cdot 2\cdot f(n-1)$

$=(3!)\cdot 2\cdot\{(3!)\cdot 2\cdot f(n-2)\}$〔對 $f(n-1)$ 作同樣討論〕

$\vdots$

$=(3!)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot f(1)$

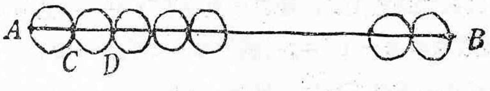
$=(3!)^n\cdot 2^{n-1}$ 〔因 $f(1)=3!$〕

這個漸化式

$$f(n)=(3!)\cdot 2f(n-1);\qquad f(1)=3!$$

因只是牽涉到 $f(n)$ 與 $f(n-1)$ 兩項間的關係，較容易解決。

(ii) 現在不考慮一筆劃的問題了，**我們改以考慮的是，所有從A到B 的走法(當然不得重複走過任一弧線)**。假設由A到B有k個「圓環」時，從A到B的這些走法共有 $g(k)$ 個。



〔k個圓環〕

(a) 若所走的路徑並不遍經第一個圓環 ${}_A\ominus_C$，則從A至C祇能經過一條弧線，即有3個選擇；此後，問題就歸於由C到B的情形了（有 $g(k-1)$ 種走法），故共有

$3\cdot g(k-1)$ 個走法

(b) 若所走的路徑遍經第一個圓環 $_A\ominus_C$，可再分以下兩種情形:

①先把第一個圓環 $_A\ominus_C$ 完全走遍後，再自 C 上路到 B，故共有

$$(3!)\cdot g(k-1) \text{ 個走法}$$

②先從 A 到 C 只走一條弧線，然後就前進到 D；此後，或繼續前進，或立即回頭，遲早總要回到 C 點來走完第一個圓環。這樣的走法共有

$$(3!)\cdot(g(k-1)-3\cdot g(k-2)) \text{ 種}$$

綜合上述 (a) 與 (b)，得

$$\begin{aligned} g(k) &= 3\cdot g(k-1)+(3!)\cdot g(k-1)+(3!)\cdot(g(k-1)-3\cdot g(k-2)) \\ &= 15\cdot g(k-1)-18\cdot g(k-2) \end{aligned}$$

而我們的始初條件 (initial condition) 是:

$$g(0)=1\text{；及 } g(1)=9$$

再一次，我們的問題化成了如下的漸化式問題:

對一個數列 $\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_k, \cdots\cdots, a_n\}$，已知	
	$a_0=1$； $a_1=9$
及漸化式	$a_k-15\cdot a_{k-1}+18\cdot a_{k-2}=0$
求	$a_n=?$

像上述能化成漸化式來求解的問題，都屬於所謂「差分方程」(difference equation) 的問題。**平常差分方程的求解，時常借用微分方程的想法**；但上兩個例子，其實只是線性常係數的二階差分方程的特殊情形，我們的「移位消去法」便亦夠用了。下節，我們要來看看這個求解過程。

§5 以「移位消去法」求解「漸化式」

先給定漸化式 (三項間的關係)：

$$a_n+\alpha\cdot a_{n-1}+\beta\cdot a_{n-2}=0 \tag{1}$$

【分析】：

回看〔問例 2〕中的一筆劃問題。由於我們所知的只牽涉 $f(n)$ 與 $f(n-1)$ 兩項間的關係，即

$$f(n)=12\cdot f(n-1)$$

我們馬上可以重覆「移位」去推求:

$$f(n)=12\cdot f(n-1)=12^2 f(n-2)=\cdots\cdots=(12)^{n-1}\cdot f(1) \tag{2}$$

而解出所求。但目前我們面對(1)式，顯然沒有這個方便，於是我們把(1)式拆成

{關於 n 與 $n-1$ }$=p\cdot${關於 $n-1$ 與 $n-2$ }

如果湊成功了，便可仿(2)這樣「移位」推求，找到 {　　}。

於是，我們取

$$\{a_n-q\cdot a_{n-1}\}=p\cdot\{a_{n-1}-q\cdot a_{n-2}\}$$

集項得

$$a_n-(p+q)\cdot a_{n-1}+p\cdot q a_{n-2}=0$$

與(1)式

$$a_n + \alpha\cdot a_{n-1} + \beta\cdot a_{n-2} = 0$$

比較，知可從

$$\begin{cases} p+q=-\alpha \\ p\cdot q=\beta \end{cases}$$

中解得 p 及 q。

然後，我們便有了

$$\begin{cases} (a_n - q\cdot a_{n-1}) = p^{n-1}\cdot(a_1 - q\cdot a_0) \\ (a_{n-1} - q\cdot a_{n-2}) = p^{n-2}\cdot(a_1 - q\cdot a_0) \\ (a_{n-2} - q\cdot a_{n-3}) = p^{n-3}\cdot(a_1 - q\cdot a_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ (a_2 - q\cdot a_1) = p^2\cdot(a_1 - q\cdot a_0) \\ (a_1 - q\cdot a_0) = p^0\cdot(a_1 - q\cdot a_0) \end{cases} \quad (3)$$

而且在式組(3)中已經「移位」，準備要「消去」一些東西了。逐次將第二式、第三式、……各乘以 $q, q^2, \cdots\cdots$，再將各式相加，便可消去一大串東西。

$$\begin{array}{llll}
 & a_n - q\cdot a_{n-1} & = p^{n-1}(a_1 - q\cdot a_0) & \\
 & q\cdot a_{n-1} - q^2\cdot a_{n-2} & = p^{n-2}\cdot q(a_1 - q\cdot a_0) & \text{〔第 2 式乘以 } q \text{ 而得〕} \\
 & q^2\cdot a_{n-2} - q^3\cdot a_{n-3} & = p^{n-3}\cdot q^2(a_1 - q\cdot a_0) & \text{〔第 3 式乘以} q^2 \text{而得〕} \\
 & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\
 & q^{n-2}\cdot a_2 - q^{n-1}\cdot a_1 & = p\cdot q^{n-2}(a_1 - q\cdot a_0) & \text{〔〃 } n-1 \text{ 〃 } q^{n-2} \text{ 〃〕} \\
+) & q^{n-1}\cdot a_1 - q^n\cdot a_0 & = q^{n-1}(a_1 - q\cdot a_0) & \text{〔〃 } n \text{ 〃 } q^{n-1} \text{ 〃〕} \\
\hline
 & a_n - q^n\cdot a_0 & = (p^{n-1} + p^{n-2}\cdot q + \cdots + p\cdot q^{n-2} + q^{n-1}) & \\
 & & \quad (a_1 - q\cdot a_0) & \\
 & & = \dfrac{p^n - q^n}{p-q}\cdot(a_1 - q\cdot a_0) & (*)
\end{array}$$

故
$$a_n = \frac{p^n - q^n}{p-q}(a_1 - q\cdot a_0) + q^n\cdot a_0$$

習題 6 利用「移位消去法」直接簡化（不經等比級數的求和）

$$p^{n-1} + p^{n-2}\cdot q + \cdots\cdots + p\cdot q^{n-2} + q^{n-1} \quad ⑫$$

〔提示：一次乘以 p，一次乘以 q。　答案：$(p^n - q^n)/(p-q)$〕

習題 7 回到輪光問題〔問例 1〕，問甲全部輪光的機會多少？ ＿＿＿＿＿ ⑬

習題 8 回到〔問例 2〕之 (ii)，圓環的走法有多少？ ＿＿＿＿＿ ⑭

習題 9 平面上的 n 個圓，最多能將平面割成幾個部份？ ＿＿＿＿＿ ⑮

習題10 做 $D0002$ 關於數列收斂的題目。 ⑯

不以題目不精彩而不屑一顧
你不憚其煩參加演練
沉着堅毅　獨立思想
進步將在不覺中