

落河問題

鄭 本

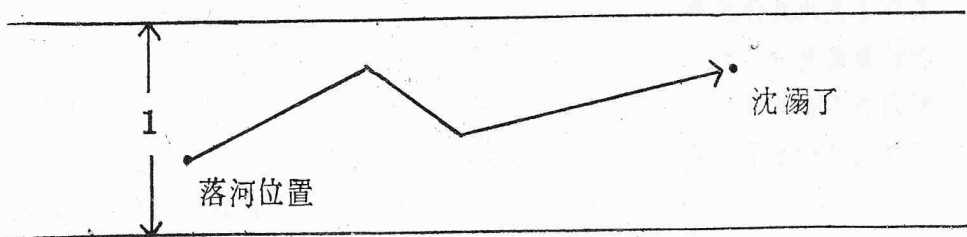
(徵答對象：職業、年齡不拘)

一個人在大霧天掉到河裏，假定所有他已知的就只有河寬，他不知道自己落河的位置，也不知道他所面朝的方向與河岸成什麼角度，他要採取什麼路線游泳，到岸的機會最大？

問題用這樣的敘述還不夠清楚，我們先將它表成較數學化的語言：

首先我們假定河水是靜止的，同時不妨假設河的寬度是 1 公里。先來考慮一個簡單的情形：

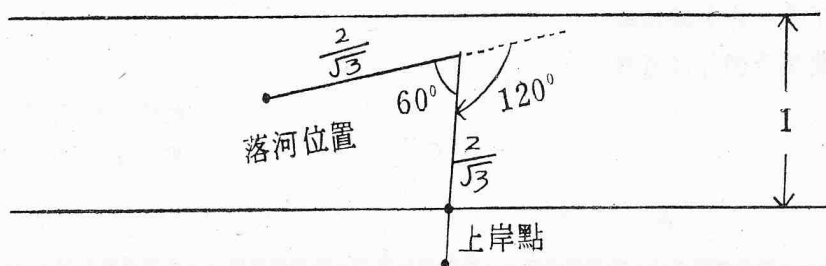
如果這人確知他能游個 $4/\sqrt{3}$ 公里的距離(即約 2.3094 公里)，那麼他是活定了，可是他若不先明智的選擇一個策略，卻懵然找一個方向一直游過去，等到摸不到岸時，才又慌亂的轉變，運氣不好東轉西轉，說不定就游到精疲力竭仍到不了岸(例如下圖)。



但這人如果取定下列的游法：

「先隨便找一個方向，游了 $2/\sqrt{3}$ 公里的長度後，或左或右，轉個 120° 角，然後筆直游去」

則他在游過 $4/\sqrt{3}$ 公里之內必定會碰到岸邊。道理是他所游的路線是正三角形的兩個邊，既然邊長為 $2/\sqrt{3}$ 公里，則此正三角形的高度有 1 公里，而一個高為 1 的三角形丟在間隔為 1 的許多平行線上必定會碰到這個正三角形，故此，這人游泳的路線必與岸邊相觸：



現在問題來了，上述解中游

$$4/\sqrt{3} \text{ 公里} \quad (\text{約 } 2.3094 \text{ 公里})$$

的體力，是否為這入必活的必要條件？如果這入只能游個 2 公里，仍然有無必活的策略？如果這入只能游 1 公里，他又該怎麼辦？

問題的一般化：

假定此人體力最多能支持他游 α 公里的距離（這人事先也已明白此事），設 A_α 表在此已知情形下的一個策略， $P(A_\alpha)$ 表根據此策略，這入能到岸的機會。又對每個固定的 α ，設

$$P_\alpha \equiv \max\{P(A_\alpha) \mid \text{所有策略 } A_\alpha\}$$

問題A：問使得 $P_\alpha = 1$ 的最小 α （或 infimum）是多少？換句話說：這人體力達到什麼程度（以其所能支持的游距 α 來代表）時，便有必活的策略？

問題B：對每個固定的 α ，找出最佳游法 A_α （即使得 $P(A_\alpha) = P_\alpha$ 者）

（這個落河問題，當初是張系國先生提出，在本所同仁之間討論，後來也有些人士費心得了部份結果，但迄未完滿解決——編輯部。）

mathmedia * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * mathmedia

要數季長此為你服務
你就要盡幾分心力
獨角戲不會熱鬧
不熱鬧只好早早收市

閒談時的熱心是不够的
給我們一些問題
參加各類徵答
澆幾桶清涼的水
擋擋這一片「烤」風

教師只用來接應
用來救生
但不是一條豪華客輪
運載孩子們舒服過河

太精彩的講課者常
是最失敗的教師

mathmedia * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * 數學傳播季刊 * mathmedia