三角演題正誤解

羅添壽

（本文文後附有編輯部按語）

學生學習數學興趣濃當然值得嘉許，然而有許多學生往往於考試後所得到的分數是「紅字」，因此而洩氣，其原因在於未對所學詳加瞭解，只求能算出答案，而未注意到答案是否正確可靠，底下就是一些常見的例子：

【例1】設 $\sin 3\theta=1$，求 $\sin\theta$ 之值？

誤解　由 $\sin 3\theta=1$，得 $3\theta=\frac{\pi}{2}$　$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$　$\therefore\sin\theta=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

正解(A) 令 $\sin\theta=x$，則由 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，得 $1=3x-4x^3$ 即 $4x^3-3x+1=0$

$\therefore(x+1)(4x^2-4x+1)=0$

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & -3 & +1 & \underline{-1} \\ & -4 & +4 & -1 & \\ \hline 4 & -4 & +1 & \underline{+0} & \end{array}$$

$\therefore(x+1)(2x-1)^2=0$　$\therefore x=-1$ 或 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

$\therefore\sin\theta$ 之值為 $\frac{1}{2}$ 或 -1。

正解(B) $\sin 3\theta=1\longrightarrow 3\theta=\pi/2+2n\pi,\ n\in Z\longrightarrow\theta=\pi/6+2\pi\cdot(n/3)$

$$\longrightarrow\theta\text{同界於}\begin{cases}\pi/6,\text{若}n=3k\cdots\cdots\cdots\rightarrow\\ 5\pi/6,\text{若}n=3k+1\cdots\cdots\rightarrow\\ 9\pi/6,\text{若}n=3k+2\cdots\cdots\rightarrow\end{cases}\longrightarrow\sin\theta=\begin{cases}\sin(\pi/6)=1/2\\ \sin(5\pi/6)=1/2\\ \sin(9\pi/6)=-1.\end{cases}$$

【例2】設 $A+B=\pi$，求 $\tan A+\tan B$ 之值？但 $A,B\in[0,\pi]$。

誤解　$\because A+B=\pi$　$\therefore A=\pi-B$

$\therefore\tan A=\tan(\pi-B)=-\tan B$　$\therefore\tan A+\tan B=0$

正解　(i) 若 $A\neq\frac{\pi}{2}$ 則 $B\neq\frac{\pi}{2}$ 其解如上述，

(ii) 若 $A=\frac{\pi}{2}$ 則 $B=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan A,\tan B$ 均無意義　$\therefore\tan A+\tan B$ 無意義。

【例3】求 $\sin A+\sin 2A+\cdots\cdots+\sin nA$ 之和？

誤解　設　$S=\sin A+\sin 2A+\sin 3A+\cdots\cdots+\sin nA$

$$\therefore 2\sin\frac{A}{2}S=2\sin\frac{A}{2}\sin A+2\sin\frac{A}{2}\sin 2A+2\sin\frac{A}{2}\sin 3A+\cdots\cdots+2\sin\frac{A}{2}\sin nA$$

$$=\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{3}{2}A\right)+\left(\cos\frac{3}{2}A-\cos\frac{5}{2}A\right)+\left(\cos\frac{5}{2}A-\cos\frac{7}{2}A\right)$$

$$+\cdots\cdots+\cos\frac{2n-1}{2}A-\cos\frac{2n+1}{2}A\Big)$$

$$=\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}A$$

$$=-2\sin\left(\left[\frac{A}{2}+\frac{2n+1}{2}A\right]/2\right)\sin\left(\left[\frac{A}{2}-\frac{2n+1}{2}A\right]/2\right)$$

$$=-2\sin\left(\frac{n+1}{2}A\right)\sin\left(-\frac{n}{2}A\right)$$

$$=2\sin\frac{n}{2}A\sin\left(\frac{n+1}{2}A\right)$$

$$\therefore S=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\sin\left(\frac{n}{2}A\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}A\right)。$$

正解 (i) 當 $\sin\frac{A}{2}\neq 0$ 時，其和如上所解。

(ii) 當 $\sin\frac{A}{2}=0$ 時，$\frac{A}{2}=m\pi$ $(m\in Z)$，即 $A=2m\pi$，此時其和為 0。

【例 4】 設 $\sin x=\frac{1}{2}$ 求 $\sin 2x+\cos 3x$ 之值?

誤解 $\because \sin x=\frac{1}{2}$ $\therefore \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2x+\cos 3x=2\sin x\cos x+4\cos^3 x-3\cos x$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

正解 未知 x 在何象限 $\therefore \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 所求為 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

【例 5】 求 $(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)$ 之絕對值?

誤解 $(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

將(1)式與 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 相比較，知 $r=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\therefore$ 所求為 $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$。

正解 $\because$ 依定義，複數之絕對值必須為正或 0，

$\therefore$ 所求絕對值為 $\left|2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=2\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$。

【例 6】 設 $\tan(\pi\cot\theta)=\cot(\pi\tan\theta)$ 求 $\tan\theta$ 之值?

誤解 $\because \tan(\pi\cot\theta)=\cot(\pi\tan\theta)=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\pi\tan\theta\right]$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (A)

$\therefore \pi\cot\theta=\frac{\pi}{2}-\pi\tan\theta$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1)

$\therefore \cot\theta=\frac{1}{2}-\tan\theta$

$\therefore 2\tan^2\theta-\tan\theta+2=0 \Longrightarrow \tan\theta=\frac{1}{4}[1\pm\sqrt{1-16}]=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{15}i)$。

正解 由 (A) 式知 $\pi\cot\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}-\pi\tan\theta$ ，$n\in Z$

$$\text{即}\tan\theta+\cot\theta=\frac{2n+1}{2}$$

$$\therefore \tan^2\theta-\frac{2n+1}{2}\tan\theta+1=0 \Longrightarrow 2\tan^2\theta-(2n+1)\tan\theta+2=0$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1}{4}(2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}),\quad n\in Z. \cdots\cdots(2)$$

$\because \tan\theta\in R$ $\therefore 4n^2+4n-15\geq 0$ 即 $(2n-3)(2n+5)\geq 0$

$\therefore n\geq\frac{3}{2}$ 或 $n\leq-\frac{5}{2}$ $\therefore$(2)式中 n 不可爲 $1, 0, -1, -2$

【例 7】 設 $\sin A, \sin B$ 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根，試以 p, q 表 $\sin(A+B)\sin(A-B)$?

誤解 由根與係數之關係，得 $\begin{cases}\sin A+\sin B=-p\\ \sin A\cdot\sin B=q\end{cases}$

又 $\sin(A+B)\sin(A-B)=(1/2)[\cos 2B-\cos 2A]=(1/2)[(1-2\sin^2 B)-(1-2\sin^2 A)]=(1/2)\cdot[2\sin^2 A-2\sin^2 B]=\sin^2 A-\sin^2 B=(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(A+B)\sin(A-B)&=-p\cdot\sqrt{(\sin A-\sin B)^2}\\&=-p\cdot\sqrt{(\sin A+\sin B)^2-4\sin A\sin B}\\&=-p\cdot\sqrt{p^2-4q}\end{aligned}$$

正解 $\because (\sin A-\sin B)^2=(\sin A+\sin B)^2-4\sin A\sin B$

$$\begin{aligned}\therefore \sin A-\sin B&=\pm\sqrt{(\sin A+\sin B)^2-4\sin A\sin B}\\&=\pm\sqrt{p^2-4q}\end{aligned}$$

$\therefore$所求式該改爲 $(-p)\cdot(\pm\sqrt{p^2-4q})=\pm p\cdot\sqrt{p^2-4q}$ 。

【例 8】 設 a, b 爲實數且 $a=\frac{b^2-\tan\theta}{b\tan\theta-1}$ 求銳角 θ 之界限?

誤解 原式可書爲 $ab\tan\theta-a=b^2-\tan\theta$，即 $(1+ab)\tan\theta=b^2+a$，

若 $1+ab\neq 0$，則得 $\tan\theta=\frac{b^2+a}{1+ab}$ $\therefore \theta=\tan^{-1}\frac{b^2+a}{1+ab}$ 即銳角即可。

正解 原式可書爲 $b^2-(a\tan\theta)b+(a-\tan\theta)=0$

$\because b\in R$ $\therefore$判別式$\triangle=a^2\tan^2\theta-4(a-\tan\theta)\geq 0$

即 $a^2\tan^2\theta-4a+4\tan\theta\geq 0 \cdots\cdots(1)$

(1) 式 $\forall a\in R$ 恒成立則判別式$\triangle\leq 0$，即 $16-16\tan^3\theta\leq 0$，即 $1-\tan^3\theta\leq 0$

$\therefore \tan^3\theta-1\geq 0$ $\therefore (\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1)\geq 0$

$\because \tan\theta$ 爲實數且 $\tan^2\theta+\tan\theta+1\geq 0$ 恒成立

$\therefore \tan\theta-1\geq 0$ $\therefore \tan\theta\geq 1$ $\because \theta$ 爲銳角，故所求爲 $\frac{\pi}{4}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$

【例9】 設 $\sin\theta, \cos\theta$ 爲 x 之方程式 $x^2-ax+a=0$ 之二根，求 a 之解集合?

誤解 由根與係數之關係得 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a \cdots\cdots(1)\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=a \cdots\cdots(2)\end{cases}$

$(1)^2-2\times(2)$ 得 $1=a^2-2a$

$\therefore a^2-2a-1=0\quad \therefore a=1\pm\sqrt{2}\quad \therefore a$ 之解集合爲 $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$。

正解 $\because \sin\theta+\cos\theta=a$

$\therefore \sqrt{2}\ (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)=a$

$\therefore \sqrt{2}\sin\ (\theta+\frac{\pi}{4})=a\quad \therefore |a|\leq\sqrt{2}$ ……………………………………(3)

又 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta).=\frac{1}{2}\sin2\theta=a,\quad \therefore |a|\leq\frac{1}{2}$ ……………………(4)

由 (3),(4) 得 $|a|\leq\frac{1}{2}$, 但 $1+\sqrt{2}\notin\left\{a\,\middle|\,|a|\leq\frac{1}{2}\right\}$

$\therefore$ 解集合爲 $\{1-\sqrt{2}\}$。

【結語】 筆者所擧諸例，不但是學生們易犯錯之處，可能亦爲教師們易於忽略之處。尤其一般數學參考書幾乎都以「誤解」出現，貽害學生；遺憾！故筆者提供一些例子供各位參考，謝謝，並祝愉快。

本文作者現任教於臺南縣省立新化高中。

【編輯部按語】

羅先生的文章在「提醒學生解題需要細心」上邊，確實有着無可爭議的功用，我們很樂意把它登了出來。但原文所提的15個例子，我們經過簡併，成了9個例子，同時我們請了一位編撰先生在下邊寫了一點意見。我們非常歡迎這些意見引起的各種看法。當然我們更希望羅先生繼續來稿，以下是這位先生的意見：

一般處理三角函數問題，常常容易疏忽的地方：

1. **三角函數爲週期函數並非嵌射，** 故已知三角函數值要取角度時，常常只取主値忘了取通値，如

   (i) $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\cdots\cdots$

   (ii) $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\cdots\cdots$

   這些毛病只要教師好好讓學生畫一畫三角函數的圖形，並由此觀察分析提煉出各個三角函數的特徵性質，多少就可以改善了！

2. **三角函數的值域有着限制，** 如忘了 $|\sin x|,|\cos x|\leq 1,|\sec x|,|\csc x|\geq 1$，這些只要知道三角函數的“定義”或仔細看看函數圖形就可以搞清楚了。

3. **三角函數原本可用來描寫波動，故當兩個同頻率的波動重疊時，別忘了用和角公式來處理。**

其他屬於代數計算上易於疏忽之處有

(1) 不得以 0 爲除數。

(2) $x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$ (二次函數 $y=x^2$ 也非嵌射)

(3) 取的限制條件不夠，如二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 函數值永遠小於 0 的充要條件爲 $a<0$ 且 $\triangle=b^2-4ac<0$ 只記得 $\triangle<0$ 而忘了 $a<0$。

所提一些學生在解題時易犯的“錯誤”，都是屬於以上的疏忽，似不宜作爲全錯來看待。因

爲這裏頭學生對問題已經做到相當可以的地步了，雖不完全，卻已答覆了問題的主要部份。

由於「新數學」對嚴密性的要求，及聯考測驗題對與錯的二分法，常使很多教師也不能不要求學生解題時，必須做到“天衣無縫”“滴水不漏”的地步，因此常把學生疏漏的地方認爲是嚴重的“觀念錯誤”！

平常找個學生來問他 6 是否可除以 0？大概都能回答不可以（至於是否懂得其中道理暫且不管），可是考試時偏偏就忘了有這一回事，你說是什麼道理？在學校的考試既不像聯考那樣嚴重，就不妨給些部分分數，以免成績過分低劣，打擊學生的興趣！

另外關於“定義”上疏忽的地方，我們的看法是“定義”是相當“人爲”的東西，**其實“定義”本身只有好與壞並無所謂對與錯，一個教師該做的是在下定義前的分析工作，讓學生可以很自然的了解爲什麼要下這個定義，絕不是在定義的字句裏“咬文嚼字”，這樣只有逼得學生去死記這些條文**。很遺憾的，目前許多人注重的所謂“觀念”也常是在文字的“約定”上爭執不下，其實即使搞清楚了oi是實數還是虛數，對數學實質上的進步並無助益。

最後反三角函數取主値的問題，請參考數學教室第 I 期「關於『第五冊第一章極座標』中的一些爭議」一文中的第⑵節反三角函數的取値問題（p. 20～21）。