

同黃武雄教授談他

參與數學改革的酸甜苦辣

陸思明

時間：民65年3月3日

地點：南港中研院

今天有點冷，加了一件外衣就輾轉奔赴南港而來，爲了籌思訪問的主題，忽略了車窗外那些綠樹青山。趕到中研院數學所三樓，已是上午十點時分。這是昨晚同黃教授約好的時間，而他也正好適時到達，在幾句寒暄之後，就開始了下面的問答。

陸：教授，近三年來您參與了高中的數學改革，大家看得出您是投入最多的人，趁這機會談談這一過程中您的感受好嗎？

黃：這是個好話題，但說從那裏談起呢？

陸：先談談您寫的第三，四冊實驗本的情形，……每本大概寫了多久？

黃：一兩個月的樣子。不過在下筆之前，早用了很多時間來籌思。有些人常對一樁事情想了很久，一旦落筆則自己要求很快完成。這祇是一種習慣。話說回來，寫教科書是精細的事，確實不能這樣的做法，該投入遠爲充裕的時間與人力。

陸：當初有怎樣的構想？（我側着身子，透過黃教授的鏡片注視着他的眼神，短暫的沈默裏身邊的錄音機傳來極細微的轉動聲。）

黃：白話。這裏我所說的白話，不只是文體的白話。事實上，數學除了文句的外衣之外還穿着另一層語言的內衣。這層語言，可以說是它的形式。換句話說，就是它的符號，名詞，式子及邏輯的推理，十幾年來由於抽象數學的興起，很多人誤把這層語言看成數學的主體，但這層語言是一套專門語言，如果太過講究就要浪費學生的心力，要將學生的注意帶錯了方向。我們要衝破、要簡化這套語言，這就是一種「白話」運動。當然，我所說的「白話」運動還有它更進一層的意義。這些我會在其他場合澈底討論。回想起來，我早在讀書的時候就常有一種感覺，很多東西弄通之後原只是幾條脈絡鮮明的想法，可是我們的老師、書本都不曾告訴我們什麼是課程中的主要脈絡、主要想法。也許是這個感覺帶我走進數學教育的圈子，雖然我畢竟也不曾寫出像樣的書來。

陸：在內容方面，您的處理有些什麼特點？

黃：陸老師這個問題，很叫我惶恐。那些不該說是我自己的處理，我們寫書的人只不過把前人累積的東西，設法做一個表達罷了。況且我動手之前已有項武義先生的原稿。這份原稿我早在第三、四冊採用之初就建議將它公諸於世，現在也已印好發給各校了（註一）。如果要問我在第三、四冊中的表達有什麼特點，我想我是着重問題的處理，比如我強調只要學會向量加

〔註一〕項武義原稿本存書尚多，有興趣的人，可去函向臺大數學系索閱——編輯部按。

法，係數積與內積的運算，便可以處理任何歐氏幾何中的問題比如求交點，求交角啦……。

到第四冊時，我用了剛性運動的特徵性質說明了這事（註二）。

陸：好像在第三冊的第一章您強調的是代數與幾何間的交互“轉化”？

黃：是的。我認爲高中數學教材的兩個主要脈絡就是“逼近”與“轉化”，在數學教室第一期“樹的形貌”和第六期“高中數學教材內容的來龍去脈”這兩篇專文中我相當仔細地申述了我的觀點。（這時黃教授在靠椅中，雙手捧着一杯茶，眼睛看着我，似乎想從我的面部表情中探測我是否看過他的這兩篇文章）。

陸：教授，第四冊可能是引起爭論最多的。我自己就常聽到有人說“線性映射有什麼用？”“爲什麼要講固有值？用老辦法不是一樣方便？”……

黃：任何新觀點與新方法的引進，總難免招致某種程度的誤解與排拒。最常見的浮泛批評就像“標新立異”啦，“好高騖遠”啦，“不切實際”啦，……（似乎有一絲苦笑掠過他的嘴角）。兩年前我初寫教科書，表達得不好造成很多原可以避免的困難。有些單元，後來我在試教中改寫了，放在數學教室中（註三）。細心點的老師、同學們都注意到了。有些老師後來按照我改寫過的教，據稱效果好了很多。一些學生也覺得讀數學教室中的一些文章，比讀原來課本的東西容易清楚。這些都是經驗。

說到這裏，黃教授曾舉出一個例子，他說有個讀經濟的研究生，讀了很多高深的應用數學，有一次遇到一個問題無法解決來向他請教，結果這問題的癥結竟然是可以用高中教材內的方法予以設計處理。我想教授是在強調教學方法與讀書方法，說明高中教材本身並非不切實際。

有關固有值方面，賴東昇教授在數學教室第IV期的固有值問題和葉東進老師在第VII期的固有值怎麼教？都作了相當好的補充。只是我不知道有多少人會去注意到這些？（他這一問，我倒真有點不好意思，因爲對高中實驗本的內容來說，很多地方我也是一個“見樹不見林”的矮子。）

陸：聽說建中高二這學期講二次曲線的順序是圓→拋物線→橢圓→雙曲線→然後再講座標變換。而實驗本對錐線的处理卻是按橢圓→雙曲線→拋物線→圓，這樣層次提出的。對這點教授有什麼看法？

黃：我想您指的只是第四冊的第三章，就代數的觀點來看，圓的方程式確實比較簡單，依次才是拋物線、橢圓、雙曲線；但就幾何的觀點來看，平面在圓錐上的截痕是由截角與頂角的關係來區分的，如像：負類錐線，零類錐線和正類錐線，在未導出它們的方程式之前，我們並不能由截角說它們誰比誰更“複雜”些。從前的書側重各類的代數方程式，故依圓→拋物線→橢圓→雙曲線。實驗本第四冊，先在第二章採用錐線截痕的觀點，對於三種錐線間的異同，先給了一個幾何概貌。自然三種錐線依其演變順序橢圓→拋物線→雙曲線來談是合理的。到第三章將錐線轉化成方程式。我們的做法仍是把圓看成橢圓的特殊情形，同時要比較橢圓與雙曲線的相似點，因此順序是橢圓（圓）→雙曲線→拋物線。至於最後又提到圓，講述的重點已經跳到圓的更高一級的層次了，如圓系、圓的正交與鏡射等，這些是課程標準中所規定的項目，不然我並不覺得值得講。

〔註二〕平面上的一個運動只要保持向量方法的三個運算，便保持了歐氏空間中的所有性質如長度，角度、比例……等等，這正說明了：「向量的三個運算決定了歐氏空間的構造，亦即利用向量的三個運算可以處理歐氏平面或立體幾何中的任何問題」。

〔註三〕如第二期中的自由度，第三期中的方差的用意與大數法則，第五期中的線性映射，第八期中的二次函數、——編輯部按。

我突然警覺到把課本的內容再談下去，這次採訪豈不沉重枯澀，味如嚼蠟了嗎？趕快轉個話題吧！

陸：黃教授，有一次我讓您“害慘”了，您知道嗎？

黃：（他面露吃驚）有這種事麼？

我告訴他那次他在臺大數學系 102 教室專題演講（用二元二次函數與等值曲線來講錐線）的時候，我雖然提前了十分鐘到達，仍無法擠進教室。不得已施出上公車的功夫，方在中間走道上獲得了立足之地。就這樣老師學生在大熱天擠作一團，熱氣蒸騰的聽了一個上午。（中途想上“一號”都不可能）

（他聽了不禁釋然一笑）。真抱歉，當時那情況也出乎我意料之外，很多老師在教室外面進不來。不得已只好以電話向賴東昇教授求救，他在另一個教室開了臨時講座之後，才解決了問題。想起來這件事我私下非常感激賴教授那次給我的支援。

陸：寫書是很辛苦的事，（我曾親眼看到黃教授在編寫第三冊的時候，因困倦而伏案打盹的情形）教授寫完第三、四冊的時候是否有一種如釋重負，輕鬆超脫的感覺呢？

黃：寫完第三冊的時候比較有這種感覺，但這不過是一種天真。後來我參與漸深，到第四冊落稿時就沒有這種快樂的心情了！（他身子略向前傾，左脚踩着面前桌櫥的第三格，頭微低，有回思狀。）

陸：爲什麼？

黃：我知道第四冊會爲老師帶來困難和爭論，而且緊接着試教的計劃也已逐漸成熟，各種考慮接踵而來，在這種情勢下如何輕鬆得起來？

（這時候，我想起自立晚報上的一篇文章，不禁好奇地想問問他的感想）

陸：不知黃教授有沒注意過去年夏天在自立晚報上一篇攻擊實驗教材的文章。

黃：我不祇是注意而且精讀了幾遍。那篇文章經作者發表後復印寄給很多學校校長，國外學者及有關人士。文章上說的一般現象，比如一些年青人放洋回來之後不可一世的百般驕態，原屬浮世繪的一角，這類現象有它存在的一定基礎，每個朝代都不能倖免。我很建議誰更生動地朝這方向寫一本「新儒林外史」。話說回來，從作者對實驗本所作的批評之中，我可以確定他不曾教過該書，他所蒐集的論據多半只是浮光掠影，人云亦云。若他事先來找我，我自身所能提供的對實驗本的批評，可供他寫篇遠較踏實的論文。不過我對該作者也有感激的地方。這幾年工作下來，我已在檢討自己「不學無術」的程度。一些我從前擅於運用的方法，這幾年生疏多了，其中有些東西不借重他人著作已無法回想的現象，顯示我自己對這些東西從來就不會真正掌握過，（我向來不願歸咎於「記憶差」）。自立晚報上的文章正提醒了我自身的處境及今後的進退。至於作者提到實驗本是賣弄國外的東西，搬回來加之於我們的學子，這點我可以斬鐵斷釘的否認。我想項先生，組內同仁與我正好都是看到國外數學教材改革趨於形式主義的偏差，才設法爲國內青年編寫一套自己的書。後來寫好寫壞是經驗上的事，但該文作者的指責只是他閉門造車想當然耳的說法而已。

這時話題轉入“試教”這一環。

陸：談起教授到彰化中學“試教”，可算數學教育史上的新猷，當時您是抱着怎樣的情懷“下鄉”的呢？

黃：我想，“試教”是編寫高中數學教材的一種道義上的責任，只有直接參與實際的教學，才能評鑑出教材本身的難、易、優、劣，了解教師們的苦情，同學們的吸收。不致讓實驗教材徒

具“實驗”的虛名。

陸：一年是一段不算短的時間，教授在臺大與中研院都有本身的工作，這兩個單位怎麼會同意你長期地離開？

黃：按常規來說“試教”原本是件不可能的事，因為臺大從來沒有開過這樣的先例。尤其我剛要由客座改為專任，人事方面當有困難。那時連數學系的部份同仁都不覺得有此可能。幸運的是閻校長准了，教育部也支持這事，當然錢院長的美意使我在幾次挫折之後又獲鼓勵，也是我一直十分感激的。尤其值得一提的是，我原該在臺大負責的兩門課因為我去試教，由同仁繆龍驥教授及顏一清教授義務擔任，這事也叫我耿耿難忘。

有這麼多人士肯為數學教育的改革無條件的獻出自己的時間和智慧，該是這一代高中學子的幸運吧！但我也注意到黃教授提到挫折時稍頓的語氣，便好奇地追問。

陸：你所說的挫折，是什麼樣的挫折？

黃：這次試教，很使我感覺：要成就一件非常的事情，達到非常的效果自然要採非常的做法，更要週遭環境給他非常的支持。在醞釀一樁這類事情的時候，支持與中立有很大的差別，有關單位的中立就等於反對。因為中立就按常規，按常規就辦不成。不要總以為破例就不得了。一件值得做的事情，說它是「破例」就憂心忡忡；若改說它為一種新風氣「開了先例」，不就很值得鼓勵？其實，像「試教」這種事，根本不須擔心此例一開，就會有人紛紛請纓而出。

陸：當時試教為什麼特別選在彰化中學？

黃：（黃教授不禁一笑）好像在你的書中也提了一句戲言（他指我最近出版的座標變換中穿插的胡言亂語），不過所以選在中部，一方面是那裏的老師不像臺北的老師那麼“忙”，可以有較多共同的時間來觀摩探討彼此的教學得失。同時地位適中，學生入學的水準平均不算偏高（註四），也容易試出教材對一般學生的效果。當時曾考慮過的還有埔里中學，臺中一中，嘉義中學等幾個學校，因為種種緣故，最後才決定在彰化中學試教。

談到這裏時已過午，黃教授邀我在胡適墓園對面一家小店進餐，兩份客飯，一碗鮮湯，外加一盤糖醋里脊，吃得湯足飯飽之餘，臨去還把剩下的大半盤里脊帶了回來。返回中研院，略事休息，接着又開始了我們的談話錄音。

陸：在彰中黃教授教的什麼班級？

黃：高一，高二各教了一班。

陸：在課堂上您怎麼教？

黃：先講解脈絡，然後提出一些問題誘導學生作答。通常一個問題我都給學生三分鐘到五分鐘的時間思考，這時候我就在課堂中繞了幾圈，看看每個學生是否都“進入情況”了。

陸：教材與進度是否和其他老師的一致？

黃：這方面我深感一般老師的講課過分受到課本與統一進度的束縛，而我自己所幸擁有較多的自由，因此進度與重點並不完全與其他班級一致。

陸：作業方面是不是偏重於申論性的問題？（這是我猜的。）

黃：是，因為申論的方式容易看出構思的過程和對問題瞭解的程度，不過高一那班並不太能適應這種方式，以後我就又選了些計算性的題目給他們當作業。

陸：考試的情形呢？

黃：頭一學期的三次月考是由我統一命題，形式上是以“題組”代替“單題”，計分採累進法。

〔註四〕試教前，編輯小組曾調查有關彰中入學程度的資料，明瞭如下事實；同樣考題的高中入學考試的成績顯示，彰中在63學年度錄取的330名新生之中，祇有34名達到臺中一中的錄取標準（即最末一名的成績），祇有342名達到臺中二中的錄取標準，而達私立臺中衛道中學最末一名成績的亦不過534名。

這些題組曾先後刊登在數學教室中，我個人最心折的是第 I 期 33 頁那五個關於向量的題組，跟我學的學生，差不多都要用這套題組考考他們的反應。

陸：其他班級的學生，對這種新型的考試有沒有困難？

黃：似乎是在上學期第二月考過後，有些老師說：『過去考得好的學生，現在有些分數降低啦，而原來一部份成績不太好的學生，反而考得好起來！』，我想這正是我所樂意看到的現象。不過爲了不影響別班的教學，也爲了方便我對本班學生的督導，我在第二學期的第二個月考開始，就採獨立的命題來考我所教的班級。

陸：彰化中學的老師對您的接納程度如何？

黃：除一兩位老師兼課較忙接觸機會較少外，我同大多數的老師相處都極爲融洽，一方面由於我上課的時間，其他老師都可以自由來參加，（比如高一的班級到下學期時總有四、五位老師在座），二方面在教學研究會上大家坦誠的交換意見，所以彼此間並無隔閡，直到現在還時常有書信來往。

這時錄音機卡嗒一聲停了，黃教授自己起身幫着把錄完的音帶翻了面。

陸：我想黃教授在試教的一年中和學生、老師建立起來的情感一定非常深厚。在您試教期滿，要離開彰中的時候，一定有很多感人的場面吧？

黃：當然，這是人情之常，不過我不認爲我的情形就特別值得大書特書。因爲大多數實習的師範生都會有類似的情形，我其實只相當於師範的實習生罷了。我記得我姐姐在小學的時候有一位實習老師跟她那一班的同學處得非常好，實習結束送別老師的時候，大家都忍不住流下了眼淚，……。

陸：有沒有特別值得提起的人和事？

黃：我很感謝彰中的關校長，整個學校每位先生，在試教中給我的真摯鼓勵與支援。很感謝彰中老師給我的合作和建議，他們很多使我非常敬佩。像黃奕章老師，他在彰中執教二十餘年從不遲到早退，我試教的這一年中，每一堂討論課他必到場參加。連我在彰化教育學院開的課（數學方法論）他也風雨無阻，騎着腳踏車走好幾公里的路趕來參加研討。像這樣敬業奉獻的老師，留給了我極爲深刻的印象。還有日夜值勤的老潘，把他整個時間都投在工作之中。我常對學生說：「不要因你一點點不如意便當它是什麼大事，意氣消沉，更不要以爲你書讀得好純是你一人之力，純是你的才分高，我們社會要把你帶到中學帶到大學，這中間不知要注入多少人的心力與生命！」

陸：數學教室在數學改革的推展中，扮演了一個非常重要的角色，教授可不可以談談？

黃：當然。

陸：當初怎樣想到要辦數學教室的？

黃：在編寫實驗教材的時候已經有了腹案。

陸：最初的稿件是怎樣蒐集的？

黃：一部分是老師與同學對教材的反應，一部分是報社轉來的讀者來函，專文部分大多由我和實驗小組的同仁執筆。另外一些題組的設計，試教的報導則由彰中提供。

陸：像數學教室這樣好的刊物，在發行之後一定有很熱烈的反應。我看到每期都有相當多的來函討論。教授對這些函件怎有那麼多時間處理？

黃：通常每封信差不多我都要回覆（除了對方問的問題太籠統，或者是在數學教室上可以看到別人已經問過的類似問題以外）。到下學期平均每天要寫三到四封解答疑難的信。可是我還是累積了卅多封較難回覆的信。（他指着櫃裏的存信，似是過意不去的說）。

陸：可見教授一年來在這方面所做的事是多麼的可觀。我想知道內情的人都會對您表無限的敬

意。

黃：談到寫信，我總存有內疚。（教授的面色似乎有點凝重，他的語音略有停頓，接着說）去年夏天試教結束，不幸我母親也在日本過世。葬禮過後，我弟弟有一次指責我：「你一年多才給媽一封信，媽生前提包裹一直擺着你最後給她的信，比什麼都寶貝……」

我爲了掩飾感染的情緒，雙手捧住茶杯啜飲，一邊接續了談話。

陸：數學教室好像一共出了八期，每期的發行量和傳播的情形怎樣？

黃：第一期相當良好，大概傳佈了一萬五千本左右，但是後來的情形卻使人難以理解。

陸：是怎麼回事？

黃：聽說有些老師勸學生不要買，甚至在學生閱讀時，指說學生看不懂，叫學生退書。當初爲了能廣爲流傳，編輯小組主動放棄了版權，沒想到它會有這樣的乖運。

我自己當中學老師廿多年，也許略爲瞭解中學老師的情況，他們課多事忙，每天看專題論文或解新題目的時間可能少之又少，因此我想數學教室的專文假若能把調子放低一點，讓大多數中學老師的嗓門都能唱得出；再把那些測驗的題組解答寫得詳盡一點，別讓老師化太多腦筋去做“標準解答”，這樣一定可以皆大歡喜，中學老師就沒有再“恨”數學教室的道理。不過這話我不好說。

陸：有時候耕耘與收穫不一定那麼相稱。我想教授播種下的種子總會有春暖花開的時候。（這時我有意轉換一下話題，配合我預先想好的“訪問細要”，就說）教授，再談談您到各地巡迴的情形好不好？

黃：好。除了宜蘭一地以外，全省各縣市的主要中學，編輯小組的同仁和我大概都走遍啦。不過不一定都是去演講，有時是參觀教學，有時是同老師座談，有時是聽聽學生的意見，解答一些爭議的問題，所以並不拘泥於一定的形式。我不太喜歡預先安排好的教學觀摩，我在到過的學校，常臨時向校長請求能夠參觀各教室的上課實情。我知道這樣很唐突，但百分之百的校長都同意了，我很盼望那些廣我見聞的老師們能不介意。

陸：教授認爲已收到些什麼成效？

黃：（黃教授略事斟酌了一番，抬頭注視着我）我想面對面的交談，至少拉近了教材的編者與老師的距離，消除了心理上的障礙。而許多實際教學上的細部困難也因之解決或減輕，我們的訪問和演講，促進了觀念的交流，經驗的交流，使大家的關係變得親切，也彼此獲得了支援，合作與鼓勵。這就是我們最希望得到的收穫。

陸：目前教授的“試教”已告一段落，您扮演的“紅娘”（註五）也暫時閃入幕後，千萬關心數學改革的人，可能迫不及待地想知道一點您今後的動態與走向。這方面教授是否可以透漏一點？

黃：任何一件大事，都是要靠集體的努力方能完成，個人的力量十分有限，目前數學教育界湧起的這團新氣象，也是大家共同參與的成果。本人雖回到了自己的崗位，在能力的範圍內仍然願意略盡棉薄，最近稍值一提的幾件事是：「註六」

1. 中研院決定出版“數學傳播”。

2. 華洋教授到景美女中試教。

〔註五〕在數學教室的序文中，黃教授都把這刊物比喻爲“紅娘”

〔註六〕在本文發稿之時，編輯部又知道了一件可喜的事，報導給讀者：吳大澍教授擬在暑期回來試教中學物理。——編者按

40 數學傳播〔論述類〕

3.現行課程標準由於實驗三年已滿，教育部七月起會根據實驗教材工作小組的總報告，重新修訂高中數學教材大綱，到六十八學年度再予採用。

4.呼籲並促成大專聯考命題的合理化。

本來我還想請黃教授多說明一下，但一看時間，已經接近下午四點了，從上午談到現在也真够累，就此告一結束吧！

辭別了黃教授，踏出中研院的大門，正好有一班大有巴士過來，一躍登車，把冷風拋在外邊。在車中自思，若能經由這種訪問刻劃出一些奉獻者的身影，使繼起者有見賢思齊，遵循標榜的典型，那我這次採訪就此行不虛了！

本文作者陸先生為省立板橋高中退休數學教師。