試教片思

華　洋

本學年中央研究院數學研究所和臺北市立景美女中合作，研討高中數學教學問題，我試教一班高一數學。在將近三個月的實際教學中，接觸了一些高中數學教育問題。大致來說，這些問題分為教材與教本，師資和教法，以及聯考和教育行政等三大項。他們之間又互相糾纏影響。這兒暫不討論這些大問題，而只討論實驗本第一册前半部的教材與教法間的問題。

實驗教材第一章引言，很多老師都略去不講。其實就引發教學動機，以及介紹高中數學的大致內容和目的而言，這一章是不可省略的。教師尤其須要反覆咀嚼這章書，時時注意到教材的精神和教育的目的，以免迷失方向。我們知道數學經由抽象化而使得問題簡明，應用廣泛。**使得問題簡明，應用廣泛也就是數學的一大目的。**所以解題技巧和難題都不是重點。通常難題和特殊技巧對學生來說都是記憶負擔，高中學生無法理解繁複的推演，更無法欣賞其中的數學。這章教材我認為尚須介紹數學的功用，包括自然科學方面和非自然科學方面的應用。非自然科學方面的應用可以例舉線性規劃問題。甚至於複利問題也可以說明數學的應用：設銀行給予存款的年利率是 5％，月複利計息比每半年複利計息好，而日複利計息又較月複利計息好，當然每小時複利一次又較日複利計息好。然而，不論如何縮短，每次計息的時間間隔，還是要取個計息的單位時間。這時就用得上數學了。函數的例子也不應局限於物理的問題上，至於函數定義和符號這兒似乎沒有必要一提。在第二章我們先看一個例子：

第二章習題 2-3 的第 10 題：

$A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C$ 則 $B=C$

證明 1：
$$
\begin{aligned}
B&=B\cap(A\cup B)\\
&=B\cap(A\cup C)\\
&=(B\cap A)\cup(B\cap C)\\
&=(A\cap C)\cup(B\cap C)\\
&=(A\cup B)\cap C\\
&=(A\cup C)\cap C\\
&=C
\end{aligned}
$$

證明 2：設 $x\in B$

(i) $x\in A\Rightarrow x\in A\cap B=A\cap C$
$\Rightarrow x\in C$

(ii) $x\notin A$，但 $x\in A\cup B=A\cup C$
$\therefore x\in C$

由 (i), (ii), $x\in C$，即得 $B\subseteq C$

同理 $C\subseteq B$ $\therefore B=C$

一般學生都喜歡證明 1，因為他只是一些運算（布氏代數運算），我以為如果老師告訴學生證明 1，學生在驚嘆運算巧妙後，只能把證明背了下來，過後又容易忘記怎麼求證。不然就必須補充練習很多布氏代數運算的題目，才可望稍解一二。可是高中學生實在用不着學懂布氏代數。事實上實驗教材這章有關集合的題材，不是集合論，只是為了解釋說明爾後章節的內容而規定一些名詞和符號而已。因之我以為只要瞭解 $A=B$，$A\subseteq B$，$A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 的意義，以及相關之簡單性質（例如笛摩根定理 De Morgan）就足夠了。一些有關性質的證明主要是讓學生熟稔基本性質，和了解類似乎平面幾何裏那樣的嚴格推理系統。

關於集合，能讓學生們十足了解$\{a,b,b\}=\{a,b\}$比讓他們知道有限集合的子集合個數來得中肯些。我並非說一個有限集合的子集合個數高中學生不用知道，我認爲不應在高一講集合時講，而應在講排列組合時講。我反覆地看這章書，認爲課本中所要申述的觀念只有$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$，據此，證明2是比較合理。總而言之，這章書不是講集合論，證明題的意義乃是希望學生將$A\cup(A\cap B)=A$以更簡單的語句，更基本的觀念證明出來，而類似 2^A 這類記號是不必引進來困擾學生的。

「簡易邏輯」部分，也不是要介紹數理邏輯，而只是告訴學生一些數學上常用語句和推理的方法，以及用不同表示法間的關係即集合與性質的對應。例如數學上常用「充要條件」，「窮舉法」等，所以要將這些名詞解釋給學生們懂。至於眞值表，我以爲沒必要去補先，因爲除了增加學生記憶負擔外，在其他章節中也沒用到。

方才所說的是針對過度引申教材造成教學內容過深不易爲學生吸收的弊病。另一方面，由於聯考以及老師間的惡性競爭，常常因爲書上有個某類型題目，大家便在其上發揮，在在超過原來書上的意思。例如實驗教材第一冊第三章數系的概念，習題中很多是數論型的題目，很多參考書便搜集這類題目給學生作，這類題目常需一些技巧，而學生作完了，也未見能多知道一些整數的性質。習題 3-1 第2題“一數x除以7，餘3；一數y除以7，餘2；那麼xy除以7的餘數是多少呢？至於$x+y$如何？”第3題“一數x除以9餘4；一數y除以9餘5；求xy除以9的餘數”。這兩個題目都很簡單，然而與他們相關連的就是韓信點兵問題或是求同餘數的問題，顯而易見的是教材並無意在一談數系便要講同餘數問題，只是要學生練習利用一些數系的基本性質推演一些簡單道理，和希望他們經由聯想而在心中建立一個命題（定理）而這個命題的證明和這兩題的作法是一模一樣的。**學生們如能學得思考的方法，遠比他生吞活剝背下來一些解題法來得重要，**尤其在爾後的學習過程中，如果學生失去思考能力，將是很難進步的。因此類似求“$(31597)^{126}$ 的個位數”的題目，並無必要在這一章便要學生做，不妨將它留待教完二項式定理以及因子分解以後，再讓學生去做。（實驗教材是將韓信點兵問題放在因子分解那章中）。

書中一再強調數系基本性質如結合律、交換律等。然而由於一般的運算“＋，×”均滿足這些基本性質，很難提供一些較好的例子，我以爲以下的例子或者有些幫助。假設 5 的平方記爲$5\uparrow 2$，5的立方記爲$5\uparrow 3$，即$a^b=a\uparrow b$，則$\uparrow$爲一種運算，但是這個運算不滿足結合律、交換律。因爲
$$5\uparrow 3\neq 3\uparrow 5\ (\text{即 } 5^3\neq 3^5)$$

不過我想這章重點除開希望學生曉得某些性質並非永遠都對之外，（只要他們知道有時候交換律等不能成立，也就相當不錯了），最重要的還是要學生明瞭，數論中紛雜的各種性質其實都可從這些基本性質推導出來。

其次是當一個問題有多種解法時，應該仔細考慮各種解法的優劣。這裏講優劣並不純是指技巧方面，尤其着重於思考方法和與課文及以前所學的關連性。試看下面的例子，

例：設 $a,b\in R$，證明

$$(1)\quad |a+b|\leq|a|+|b|$$
$$(2)\quad |a-b|\leq|a|+|b|$$
$$(3)\quad \big||a|-|b|\big|\leq|a+b|$$
$$(4)\quad |b-a|\geq\big||a|-|b|\big|$$

<u>證法一</u>：由於(1)式
$$|a+b|\leq|a|+|b|$$
兩端皆≥ 0，要證明(1)式可改以證明
$$|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$$

<u>證法二</u>：(1)(i) 設$a+b\geq 0$

則$|a+b|=a+b$

$\leq|a|+|b|$

(ii)設$a+b\leq 0$

但 $|a+b|^2=a^2+2ab+b^2$

與$(|a|+|b|)^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2$

比較，知只須說明$|a|\cdot|b|\geq ab$即可，

但 $|a|\cdot|b|=|ab|$

故知 $|a|\cdot|b|=|ab|\geq ab$

因此 $(|a|+|b|)^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2$

$=a^2+2|a||b|+b^2$

$\geq a^2+2ab+b^2$

$=(a+b)^2=|a+b|^2$

即 $|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$

故 $|a+b|\leq|a|+|b|$

同法可證 (2) (3) (4)

則$|a+b|=-(a+b)$

$=(-a)+(-b)$

$\leq|-a|+|-b|$

$=|a|+|b|$

$\therefore|a+b|\leq|a|+|b|.$

(2) 可由(1)推出（即以$-b$代b）

(3) $|a|=|a+b-b|$

$\leq|a+b|+|b|$

$\therefore|a|-|b|\leq|a+b|$

同理$|b|-|a|\leq|a+b|$

故$||a|-|b||\leq|a+b|$

(4) 可由(3)推出（即以$-a$代a）

以上兩個證法都說得上很好，但是在第二個證法中，絕對值性質表現得更為明顯，尤其是在說明(1) $|a+b|\leq|a|+|b|$ 時，給予學生關於絕對值定義的深刻印象。

例：設 $9x-4y+3z=-7x+2y+15z=13x-8y-z$，且 $xyz\neq0$，求

$$\frac{3x^2-2y^2+z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2xz}$$ 之值：

解法一：

由題設得 $$\begin{cases}16x-6y-12z=0\\20x-10y-16z=0\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}8x-3y-6z=0\\10x-5y-8z=0\end{cases}$$

$\because$ $$\begin{vmatrix}8&-3\\10&-5\end{vmatrix}=-10\neq0$$

$$\therefore\ x:y:z=\begin{vmatrix}-3&-6\\-5&-8\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-6&8\\-8&10\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8&-3\\10&-5\end{vmatrix}$$

$$=-6:4:-10=-3:2:-5$$

即 $x=-3k$，$y=2k$，$z=-5k$，k為任意不為0之實參數。

故$$\frac{3x^2-2y^2+z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2xz}=\frac{27k^2-8k^2+25k^2+30k^2}{36k^2-20k^2-150k^2+30k^2}$$

$$=-\frac{74}{104}=-\frac{37}{52}$$

解法二： 由題假設得

$$\begin{cases}8x-3y-6z=0\ \cdots\cdots\cdots①\\10x-5y-8z=0\ \cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

①·10−②·8: $10y+4z=0$ $\therefore y=-3z/5$

①·5−②·3:　　$10x-6z=0$，$\therefore x=3z/5$

則 $$\frac{3x^2-2y^2+z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2xz}=\frac{3\cdot\frac{9}{25}z^2-2\cdot\frac{4}{25}z^2+z^2-5\cdot\frac{3}{5}z\cdot\frac{-2}{5}z}{4\cdot\frac{9}{25}z^2-5\cdot\frac{4}{25}z^2-6z^2+2\cdot\frac{3}{5}z\cdot z}$$

$$=\frac{\frac{1}{25}(27z^2-8z^2+25z^2+30z^2)}{\frac{1}{25}(36z^2-20z^2-150z^2+30z^2)}$$

$$=-\frac{74}{104}=-\frac{37}{52}$$

解法一中顯然要多懂一些道理，才知道要求x, y, z 的比值而計算的過程又不比解法二簡單，解法二只是利用消去法來解方程式，是最常用的法子，故解法二較好。

最後我再以一簡單的例子來說明高中數學解題目時應該再注意些什麽。

例:　解

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$

解法一: 用公式解。

二: 將三式相加，兩端各除以4，得　$x+y+z=3$，
再由各式中減去而得 $x=y=z=1$，

三: 由於三式的對稱性可知，x, y 和 z 並無區別 (x, y, z 任意互換所得之方程組仍是一樣)，

即　　$x=y=z$

故　　$x=y=z=1$

我們固然知道解法一很笨拙，不足取，而解法三卻不只是小聰明，事實上這種利用"對稱性"等基本性質來簡化題目的方法， 在一般解法相當繁復而不易求得的時候， 常有助於我們分析題目。解法三對學生的提示是很重要的。

本文作者爲本所同仁，積極參與數學傳播工作，於本學年度在景美女中實地試敎。