淺談一次函數

劉豐哲

假想你是一家紡織廠的發展部門負責人，正在籌劃生產某種毛料。爲了生產這種毛料，必須購置新機器及增設廠房，這時你面臨了下面的問題：

> 廠房的增設是比較長久性的，你必須預測以後的銷路，估計今後十年內最高的生產量，以作爲擴建多大廠房設備的依據。

這兒我們看看你究竟如何解決這個問題。當然空想無益，你必須看看事實。首先，你研究了過去幾年這種毛料在市場上銷售的情形，結果一時間得不到什麽結論。正當你一籌莫展的時候，剛巧有一個學過數學的朋友來拜訪你，閒話間談起了你的困難。這位朋友說：「既然無法直接歸納出結論，爲何不試試倒過來的辦法？數學上，我們常常這樣做。」「但是，這是實際生產的問題，不是紙上寫寫畫畫的玩意兒，難道數學管用？」你毫不思索地回答：「反正數學不花錢，不妨試試。可以由常識上判斷影響衣料銷售量的一些因素，決定銷售量與這些因素的關係，然後由驗證所得關係是否和實際情形相符合，如果不符合就另尋其他關係或因素，如果符合了，不妨以它做爲估計銷售量的依據。」「聽來蠻有道理，何況目前也只有這個辦法，倒可試試。」顯然，你具有發展部負責人所必須具有的資質。

送走了客人，倒回頭坐了下來，就開始想：到底那些因素對衣料之銷售量最具影響力呢？這時你那六歲的兒子走進了書房衝着你說：「爸爸，今天天氣好冷，學校好幾個同學穿呢外套，我也要一件好不好？」「好！好！明天叫媽媽帶你去買。」看着兒子高興地蹦跳着出去，你對自己說：「對，如果冬季氣溫愈低，則毛呢的銷售量就愈大！可不是很顯然的道理？」正想着之間，卻見太太帶着笑容走了進來，柔聲問你：「還爲廠裏的事發呆？」「可不是？」「隔壁李太太今天買了一件大衣，質地好，樣式大方，價格又不頂貴，我也買一件怎麽樣？」，抬頭望了一下太太，你耐下心說：「今年天氣較冷，孩子都需要添置衣服，你的大衣明年再買吧！再說，你去年買的那件大衣式樣很好，今年還流行。」說着心中卻想：「就是有些人有了錢不妥善利用，儘花在奢侈的穿着上，如果……」剛想到這裏，腦筋一轉「有了！國民所得也影響毛呢的銷售量。」

如果想不到其他顯然地影響毛呢銷售量的因素，則單由這兩個因素，應該如何着手？

首先，你想到冬天的氣溫一天一天不一樣，如果每天分別考慮的話未免太複雜，更何況每天早晚氣溫不一樣。既然銷售量是一年一年估計的，取每年的平均冬季氣溫是較爲合理的；同理，國民所得也人人不同，只好取爲每年的平均國民所得。如果一年的平均冬季氣溫及平均國民所得分別用 x 與 y 表示，而 Z 用來代表一年的毛呢銷售量，則問題就歸結爲如何找出 Z 與 x，y 間之

函數關係

$$Z=f(x,y)$$

使得它能相當準確地表示出毛呢銷售量與平均冬季氣溫及平均國民所得間的關係。

從中學所學的數學裏，我們知道一次關係最容易着手，因此不妨先試試一次關係，卽

$$Z=ax+by+c \tag{1}$$

其中 a，b，c 皆爲常數。如果氣溫的單位取爲一個攝氏單位，國民所得單位取爲一仟元，銷售量的單位取爲一萬匹，則上式中 a，b，c 如何決定？當然由實際情況決定，問題是：需要多少實際資料？

如果用幾何的觀點解釋 (1) 式，則這個問題就簡單了。在空間取一直角座標系（如圖 1），則數組 x，y，z 可視爲空間一點相對於這個座標系的座標，記爲 (x,y,z)。那麼滿足 (1) 式的所有點 (x,y,z) 卽組成空間的一個平面。這個平面完全由 a，b，c 所確定；同樣，a，b，c 亦完全由這個平面所決定。我們知道空間三點決定一個平面，因此，我們必需要有三個資料 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3) 才能確定 a，b，c。換句話說，我們需要三年的平均冬季氣溫，平均國民所得，及該毛呢的銷售量才能確定 a，b，c。假設下面這個表是你調查得來的資料：

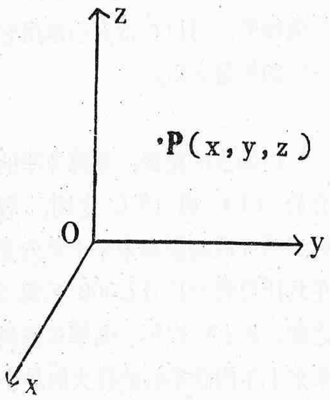

圖 1

年　　度	銷 售 量	平 均 冬 季 氣 溫	平 均 國 民 所 得
第　一　年	7　萬　匹	12°C	12,000元
第　二　年	10　萬　匹	11.3°C	13,000元
第　三　年	12　萬　匹	13°C	15,000元

若將上列資料代入 (1) 式中，則得方程組

$$\begin{cases} 12a+12b+c=7 \\ 11.3a+13b+c=10 \\ 13a+15b+c=12 \end{cases}$$

解之，得 $a=-40/31$，$b=65/31$，$c=-83/31$，因之

$$Z=-\frac{40}{31}x+\frac{65}{31}y-\frac{83}{31} \tag{2}$$

其次，你回想起來：我們假定 z 與 x，y 之間的關係爲一次關係而得 (2) 式，(2) 式是否合用，就要看這個假定是否合理。爲此，又在已有的資料中去翻查，發現了另外兩年來列在上表中的資料；

年　　度	銷售量	平均冬季氣溫	平均國民所得
？年	9 萬 匹	11.5°C	12,800元
？年	12 萬 匹	12.2°C	14,000元

如將此兩年之平均冬季氣溫與平均國民所得代入(2)式的右方，則分別得到銷售量爲 9 萬 3 仟匹與10萬 9 仟匹，與實際資料 9 萬匹與12萬匹相當接近，因此 (2) 式所表示的關係可以勉強接受，可以相當安心地用它來做估計以後銷售量之用。

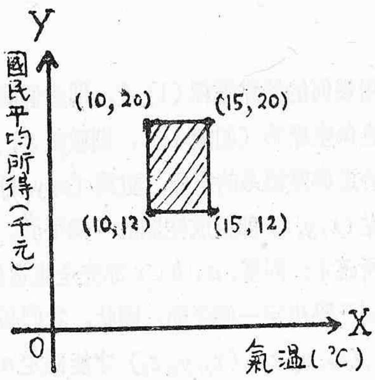

圖 2

由過去的記錄，臺灣冬季的平均氣溫介於 10°C 與 15°C 之間，假定有關的經濟研究機構認爲未來十年內臺灣的國民平均所得將介於 12,000 元與 20,000 元之間。由 (2) 式與上面這些資料可以估計未來十年內該毛料的最大與最小銷售量。首先，在 $x-y$ 平面上，上頭所說的資料卽表示我們只須考慮 (x,y) 位於圖 2 所示之長方形內時 z 之最大與最小值。如用(2)式所示在 $x-y-z$ 空間中之平面，則爲求圖 3 中斜線部分圖形之最高點與最低點之 z 坐標。由 (2) 式可知，當 x 固定而 y 由 12 增至20時，z 值跟着增加，而 y 固定，當 x 由 10 增到15時，z 值跟着減少。因此，在長方形 $10\leq x\leq 15, 12\leq y\leq 20$ 內 z 的最大值必爲當 x 最小而 y 最大時的值，卽 $x=10$, $y=20$ 時，而 z 的最小值必爲當 x 最大而 y 最小時，卽 $x=15$, $y=12$時。所以當$10\leq x\leq 15$, $12\leq y\leq 20$時，z 的最大值與最小值分別爲

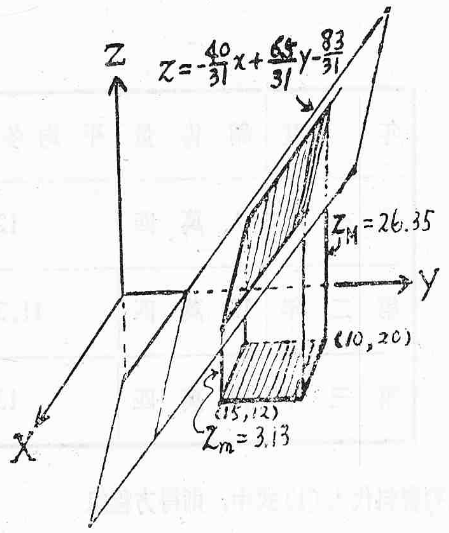

圖 3

$$Z_M=-\frac{40}{31}\times 10+\frac{65}{31}\times 20-\frac{83}{31}\doteqdot 26.35$$

及

$$Z_m=-\frac{40}{31}\times 15+\frac{65}{31}\times 12-\frac{83}{31}\doteqdot 3.13$$

因此，我們估計今後十年內該毛呢的最小銷售量爲 3,130 匹，最大銷售量爲 26,350 匹。如此，你就有了憑據，可以籌劃增設廠房的問題了。你也嚐到了中學數學幫你獲得的勝利的果實！誰說一次式沒有用呢？

上面的問題是線性規劃法的一個簡單的例子，讓我提出另外一個類似的問題，它比上面的問

題較爲有趣，也較爲複雜，但是只要你用點心，就會發覺只要一些一次式的中學數學知識就可以解決。希望你準備一些紙與一枝筆，自己動手來算!

> 假設你有甲、乙兩部機器，用來生產A,B兩種產品。已知生產每單位的A產品需在甲機器上加工3小時，在乙機器上加工6小時；而生產每單位的B產品需在甲機器上加工6小時，在乙機器上加工5小時。這兩部機器每部每年頂多可操作2100個小時。現設出售每單位的A產品可得盈利新臺幣1600元，出售每單位的B產品可得盈利新臺幣2000元。那麼你計劃每年生產多少單位的A產品及多少單位的B產品，使得全年的盈利最大?

〔提示〕：假設你一年生產x單位的A產品，y單位的B產品，則一年的盈利爲

$$P(x, y)=1600x+2000y \tag{1'}$$

由於每部機器一年頂多可操作 2100 個小時，因此 x，y 有所限制。這些限制由式子表示出來就是

$$3x+6y\leq 2100 \text{（甲機器之限制）} \tag{2'}$$

$$6x+5y\leq 2100 \text{（乙機器之限制）} \tag{3'}$$

因此我們的問題就是找出滿足不等式（2′）與（3′）的整數x與y，使得(1′)式最大。

如果在$x-y$平面上將滿足（2′），(3′)式的點所組成的區域繪出，並用類似先前的推論，則不難判斷你的生產計劃應是如何。祝你好運!

本文作者爲中央研究院數學研究所代理所長，亦任敎於臺灣大學數學系。本學年度在「數學傳播」計劃下定期赴彰化高中實地試敎。