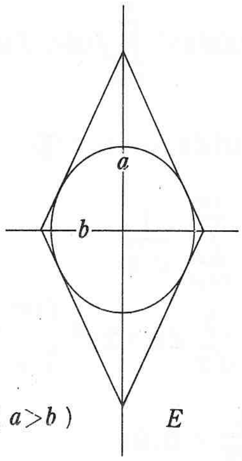
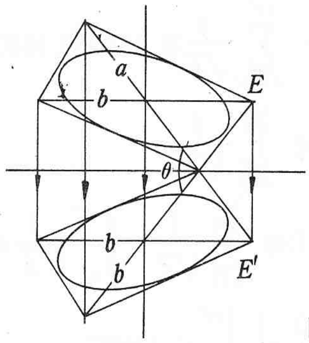
(2.吳孟年來函)

編輯先生：

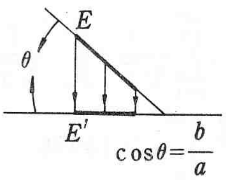
您好！學生是淡江大學數學系一年級吳孟年，最近看到貴刊第9卷第4期編號9401題目“證明橢圓外切正方形唯一”，在此提供個人淺見。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

在平面E上給定一菱形外切於一圓，如圖(一)，若要使此菱形經過某一函數運作，映射而成為正方形，就如同圖(二)一般，經過投影的結果，菱形變成正方形了。而此時，內接圓也成為橢圓了，此為1－1之對應。故菱形的大小、比例不同（當然內接圓的半徑邊不同），所得到正方形的大小也不同（當然橢圓之大小、離心率也不同了）。所以，橢圓外切正方形當然唯一。不過，這樣似乎不太合乎數學的嚴密性，那我們可以用三維空間來討論，設定一般式即可。

附帶的提到，橢圓面積（a為長半軸，b為短半軸）πab的證法，可以不用定積分，只要用到投影的觀念即可，好像斜切水管一樣，缺口就是橢圓。

學生對大學、中學的數學教學也有點意見，就是一個問題，明明很簡單的觀念，很簡便的作法就可以使學生了解，（雖然這種方法不容易想到），但是卻往往要用一些學生未曾學過的東西來教學生，於是數學變成死的東西，不知您是否有此感覺？

祝

研安

學生吳孟年敬上

吳先生：

你的構想必須能夠寫出來才行，這樣子光說不練是不行的。其實，那次徵答的回信相當踴躍，而證明的簡單完善就是我評判的標準。

橢圓面積確實可用投影觀點由圓的面積加以證明。但是，什麼叫做圓的面積？若以積分定義面積，則橢圓面積為

$$2\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx}$$

$$=2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2dx}$$

今令 $u=\frac{x}{a}$ 則上式為

$$2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2dx}$$ 此處 $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2dx}$

即為圓之面積。這裏作 $u=\frac{x}{a}$ 的變換，其實也可以解釋為投影。

其次，你又想到「明明很簡單的觀念，……學生未學過的東西來教學生……」，關於這個，我要分兩點來說。

1.不錯，現在中學裏某些老師傳授的解法的確非常「高妙」。例如橢圓平行弦的徑的方程式居然用偏微分來算。如此導致學生在學習數學時，沒有整體的概念而且不求甚解，因此無法發揮。

2.但是，有時我們也要「小題大做」一番。一個沒有堅實基礎的想法或做法，即使可行，也是會受到質疑的，終究要說得明白。例如面積是什麼？你完全知道它的數學定義嗎？黎曼積分不存在的區域可以有面積嗎？

朱建正　覆

(3.吳宗潔來函)

編輯先生：

您好！我是一位中學生，最近由“數學傳播”季刊中得知該刊有一問題徵答來解決各類的數學問題，因此想將吾人多年來百思不解的一題題目交由各位教授或其他對數學有興趣的人士助吾解之。

“在同一平面上”有三個“○”在同一直線上（呈直線排列），其下有三個“△”亦在一直線上（呈直線排列），且與其上的“○”呈平行狀之一對一排列（如圖），今欲將三個“○”各以三條直線與三個“△”相連，線可彎曲但不得相交，試畫之：

在同一平面上

例：　○　○　○

△　△　△

如圖：b，c 均與 x，y，z 連接，然而卻構成了閉區間使 a 無法與 z 相連，故如此又失敗了。（據吾猜測此題似乎與Moebius帶及開閉區間有關，希望能供您作參考）

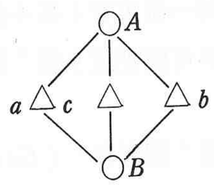
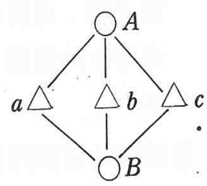
當三年多前吾得此題時，盲目的作了數百個圖，但均無法解出，迨吾上了高中以後，多閱讀些有關數學的課外讀物後，知道數學中有一門 Topology的學問似乎與此題有關，然而此門學問並非吾現今之基礎所能研讀的，故至今雖然略有尋求之方向但仍無從着手，因此想請教各位師長指導，或許此題解法非吾能了解，但仍望您能幫吾作答，並指導吾尋解之方針及介紹種種書籍供吾現在或以後能看懂時參考。謝謝！（希望能說明原理及過程）

學生　吳宗潔　敬上

吳先生：

爲了敍述方便，分別稱三個“○”及三個“△”爲 A，B，C 及 a，b，c 自 A，B，C 分別有線可達 a，b，c 三點，得 9 線。從另一角度來看，自 a，b，c 也分別有線可達 A，B，C。

(甲)在尋找合於要求的安排的過程裡，得把封閉折線 $A-a-B-b-A$ 擺在平面上，以致於平面被分割成內、外二區域。C 點（△）不是置於內區域，就是置於外區域，

即  或 .

不管是那一種情形，都將平面分割成 3 個區域。此時只有 C 點（○）仍待安排，但 C 點不管置於這三個區域的那一個，該區域外必有 a，b 或 c（即“△”）。要連接它們必得越過圍成該區域的周邊，違背了“兩兩（線）除端點