如果我也來寫中學數學參考書

朱建正

如果參考書的用意在幫助中、下等程度的用功學生解題以便應付升學必讀的數學，則坊間的參考書還有許多值得改善之處。因爲一次偶然的機會，得以仔細閱讀參考書，茲將心得報告如下：

參考書題目的來源，多爲歷屆各地區、各不同性質的聯招試題之綜合，再揣摩這些試題，提供一些類題以供演練。因爲在題目的安排，和解法的選擇上都缺乏重點，因此往往困擾學生，無法達到有組織的學習。現以某參考書的三角恒等式那節爲例來說明如何改進，並希望將來的參考書可以寫得更好。

根據它的重點突破，常用證題方式爲：由繁化簡，兩邊同導出一式，和將等式中其他三角函數皆化爲正餘弦函數。注意事項爲熟練基本關係式，及以前學過的因式分解乘法公式，分式運算或比例式，並善於利用1的代用法。

如果是我，就寫成：三角恒等式的變化，是在普通的代數恒等式之外，加入 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 的關係，以及四個其他的三角函數，就是 $\csc x, \sec x, \tan x, \cot x$，即 $\dfrac{1}{\sin x}$, $\dfrac{1}{\cos x}$, $\dfrac{\sin x}{\cos x}$, 及 $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 的變化而成，因此證明時，要掌握兩個原則：

1. 普通證明代數恒等式的原則。
2. 將四個其他的三角函數都化成正餘弦，再配合平方關係。並注意固然 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，但是1也等於 $\sin^2 x+\cos^2 x$，還有 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$，這是逆向思考的一個例子。

例1：$\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}=(\csc A+\cot A)^2$

參考書：分子分母同乘 $(1+\cos A)$，再利用 $1-\cos^2 A=\sin^2 A$ 及 $\dfrac{\cos A}{\sin A}=\cot A$。

我：將 $\csc A$ 及 $\cot A$ 化成 $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$，再用 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$。

說明：不明究理的學生定然背分子分母同乘 $1+\cos A$。但爲何不同乘 $1-\cos A$? 因爲若用 $(1-\cos A)^2$ 做分母，則無法拆成兩項。若用 $1-\cos^2 A=\sin^2 A$，則拆成兩項恰好。可見我的解法直接得多。

例2：$\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

參考書：分子分母同乘 $1+\cos\theta$，再用 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$。

我：利用 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 即，$ad=bc$。即證明 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$。

註：就是 $bd=0$ 時，$ad=bc$ 仍成立，但 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 即無意義矣。故由 $ad=bc$，恒可得

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，只要 $bd\neq 0$。此法較原來的解法更基本。

例 3　$\frac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\mathrm{ssc}\,A+1}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$

參考書：將分子的 1 改成 $\sec^2 A-\tan^2 A$，分母不動。分子分解因式，得 $\tan A-\sec A+1$ 與分母相消，再將剩下的 $\tan A+\sec A$ 改成 $\frac{1+\sin A}{\cos A}$　。

我：化成正餘弦。左$=\dfrac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{1}{\cos A}-1}{\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{1}{\cos A}+1}$

$=\frac{\sin A-\cos A+1}{\sin A+\cos A-1}$ 即證 $\cos A(\sin A-\cos A+1)=(1+\sin A)(\sin A+\cos A-1)$

左$=\cos A\sin A-\cos^2 A+\cos A$

右$=\sin^2 A-1+\cos A(1+\sin A)$

$=-\cos^2 A+\cos A\sin A+\cos A$ 故左=右。

結論：參考書的解法表面上看來比較漂亮，但是我的解法較注重基本原則的運用。參考書雖然也提到化爲正餘弦，但在例題中並未設法突出此種解法。因此，對中下學生而言，無法光從參考書那裏領略到此種解法才是最基本的方法。

—本文作者任教於台大數學系—

(1.蔡深淵來函)

編輯先生：

一、關於馬步問題：

1.民國66年，參加科展，證明了：

(1)若 m 爲 10 的倍數，$n\geq 10$ 則有一遍歷 $m\times n$ 棋盤且每格只經過一次的閉路線。

(2)若 m，n 皆大於 4，則有一遍歷 $m\times n$ 棋盤且每格只經過一次的路線。證明方法繁瑣，以下舉了兩個象棋盤馬步走法，與這兩個結果的證法類似。

2.象棋盤馬步走法，筆者當時做了十幾個，今舉二個如下：