從微積分基本定理到泰勒公式

陳 卓

大家都知道，在微積分的應用場合中，泰勒公式（Taylor's Formula）是一個很重要的公式，它常見的推導方法至少有兩種以上（註一），本文中所要提出來說明的是一個從微積分基本定理出發，利用迭代法（iteration method，又譯作遞廻法或纍接法）來導出泰勒公式的方法。這個方法雖然並不特別簡捷，但推導過程自然而容易理解，並且還與量子力學中常用的微擾展開法有關連，所以值得大家注意。

讓我們先把泰勒公式以定理的形式敍述於下：

【泰勒定理】 設 $f(x)$ 爲一在 $[a,b]$ 區間內至少可以微分 $(n+1)$ 次的函數，且其 $(n+1)$ 階導函數在 $[a,b]$ 連續，而 $x_0\in[a,b]$，則對於 $[a,b]$ 中任意一點 x，$f(x)$ 可以表示爲

$$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n \tag{1.1}$$

上式中 $f^{(k)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的第 k 階導函數，而 R_n 被稱爲"餘式"，可表示爲

$$R_n=f^{(n+1)}(\xi_{n+1})\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{1.2}$$

上式中 ξ_{n+1} 爲一介於 x_0 與 x 之間的實數。

證明： 我們不妨先設 $x_0<x$，對於 $x<x_0$ 的情形證法類同。由微積分基本定理可知

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f^{(1)}(x_1)\,dx_1 \tag{2.1}$$

$$f^{(1)}(x_1)-f^{(1)}(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}f^{(2)}(x_2)\,dx_2 \tag{2.2}$$

$$f^{(2)}(x_2)-f^{(2)}(x_0)=\int_{x_0}^{x_2}f^{(3)}(x_3)\,dx_3 \tag{2.3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x_n)-f^{(n)}(x_0)=\int_{x_0}^{x_n}f^{(n+1)}(x_{n+1})\,dx_{n+1} \tag{2.n+1}$$

將 (2.2) 式代入 (2.1) 式，即得

$$f(x)-f(x_0)$$

$$=\int_{x_0}^{x}\{f^{(1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f^{(2)}(x_2)dx_2\}dx_1$$

$$=f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$+\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}f^{(2)}(x_2)dx_2$$

上式經整理後即為

$$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+R_1 \tag{3.1}$$

其中

$$R_1=\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}f^{(2)}(x_2)dx_2 \tag{3.2}$$

再將 (2.3) 式代入 (3.2) 式，即得

$$R_1=\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}\{f^{(2)}(x_0)+\int_{x_0}^{x_2}f^{(3)}(x_3)dx_3\}dx_2$$

$$=f^{(2)}(x_0)\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2$$

$$+\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\int_{x_0}^{x_2}f^{(3)}(x_3)dx_3$$

因上式中

$$\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2=\int_{x_0}^{x}(x_1-x_0)dx_1=\frac{(x-x_0)^2}{2!}$$

代入 R_1，則 (3.1) 式即可改寫為

$$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+R_2 \tag{4.1}$$

上式中

$$R_2=\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\int_{x_0}^{x_2}f^{(3)}(x_3)dx_3 \tag{4.2}$$

依照上述作法，再用迭代法繼續往下作，並可利用數學歸納法證明

$$\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\int_{x_0}^{x_2}dx_3\cdots\int_{x_0}^{x_{n-1}}dx_n=\frac{(x-x_0)^n}{n!} \tag{5}$$

即可得 $f(x)$ 對 $(x-x_0)$ 之 n 階展開式

$$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n \tag{6.1}$$

上式中之餘式

$$R_n=\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\int_{x_0}^{x_2}dx_3\cdots\cdots\int_{x_0}^{x_n}f^{(n+1)}(x_{n+1})dx_{n+1} \tag{6.2}$$

因 $f^{(n+1)}(x_{n+1})$ 在 x_0 與 x 之間為一連續函數，設 μ_{n+1} 及 M_{n+1} 分別為 $f^{(n+1)}(x_{n+1})$ 在 $[x_0, x]$ 區間內之最小及最大值，則

$$\mu_{n+1}\le f^{(n+1)}(x_{n+1})\le M_{n+1},\quad x_{n+1}\in[x_0, x] \tag{7}$$

即

$$\int_{x_0}^{x_n}\mu_{n+1}dx_{n+1}\le\int_{x_0}^{x_n}f^{(n+1)}(x_{n+1})dx_{n+1}\le\int_{x_0}^{x_n}M_{n+1}dx_{n+1}$$

亦即

$$\mu_{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\le R_n\le M_{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{8}$$

令 $$\lambda_{n+1}\equiv\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot R_n \tag{9}$$

則 $\mu_{n+1} \leq \lambda_{n+1} \leq M_{n+1}$ (10)

由連續函數的中間值定理可知，在〔x_0，x〕之間必有一數 ξ_{n+1} 存在，使

$$f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = \lambda_{n+1} \tag{11}$$

亦即使

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \tag{12}$$

故定理得證。

從以上的推導過程中我們可以看出，泰勒定理其實就是微積分基本定理的自然延伸，第(2.1)式可以被詮釋爲：函數 $f(x)$ 在 x 點的數值可以由它在 x_0 點的數值以及它在〔x_0，x〕之間各點的一階導函數之值求出，而在此區間內任一點 x_1 的一階導函數值又可以由 $f^{(1)}(x_0)$ 及此函數在〔x_0，x_1〕區間內的二階導函數之值求得，以此類推。這種想法正符合"迭代法"的基本精神，它在解很多物理問題中，尤其是量子力學中隨時間變化的微擾問題(time-dependent perturbation)，常被用到，著名的戴森展開式(Dyson's Expansion)亦就是利用這種迭代法推導而得的(註二)。

附 註

註一：泰勒定理中的餘式有所謂的積分型式及微分型式，微分型式又可分爲 Lagrange 型，Cauchy 型，Schlömilch 型等，皆源自不同的推導方法，可以參閱：

1. 孫光遠、孫叔平合撰，"微積分學"第134頁(商務印書館發行)。
2. 陳卓編著，"簡明微積分"第82及92頁(經世書局印行，民國69年4月)。
3. 楊維哲著"微積分"，第265頁(三民書局印行，民國73年10月)。
4. Sherwood and Taylor 合撰，"Calculus"，P. 390，395，397，(Prentice Hall，Inc 1954，3rd Ed).
5. A. Friedman撰，"Advanced Calculus" P101，135. (Holt，Rinehart & Winston，Inc 1971版，台北美亞書局 1974 年翻影版)。
6. L，Feigenbaum 撰"Happy Tercentenary，Brook Taylor"，載於The Mathematical Intelligencer，Vol 8，P.53 (1986)，Springer-Verlag 出版。

註二：可參閱

1. F. J. Dyson，"Physical Review" Vol 75，P. 486 (1949)。
2. A. S. Davydov 著"Quantum Mechanies" Chap Ⅸ. (Addison，Wesley 出版，台北豪華書局民國71年9月翻版)。
3. Fetter and Walecka合著，"Quantum Theory of Many-Particle Systems" P.54 (McGraw-Hill Book Co. 1971)。

誌 謝

本文內容曾就正於賴東昇、吳式玉、張海潮諸位先生，並承曹亮吉先生提供參考資料，特此誌謝。

～本文作者任教於台灣大學物理系～