泰勒級數及其一些應用

楊重駿

1.導　言

本文主要是介紹如何利用初等微積分學中的泰勒級數（或展開式）定理來證明一些基本及重要的不等式，同時也舉例說明如何利用此定理來討論一些不定型函數極限的處理及其收斂速率。

2.泰勒級數定理的推演

我們先引用下面一個直覺而有用的結果，即所謂的Rolle 定理。

定理１：設f爲定義在區間〔a，b〕上的實函數，且f在（a，b）上到處可微分。若$f(a)=f(b)$　則必有一點c介於a，b之間使得$f'(c)=0$。

這個定理嚴格的分析證明涉及實數域的基本原理（即實數的完備性），不便在此多作說明。但我們可以參看圖形來認識定理１的眞實性。値得注意的是條件f在（a，b）上到處可微分的條件不能放鬆一點。參看圖２或更簡單取$f(x)=|x|$。此函數在$x=0$點不可微分，而在區間〔-1，1〕內就除了$x=0$外都可微分，且$f(1)=f(-1)$。參看圖３。但沒有一點c，$0<c<1$，使得$f'(c)=0$。

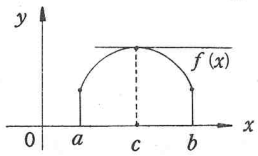

圖１

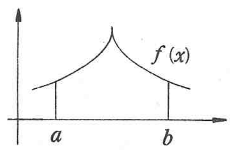

圖２

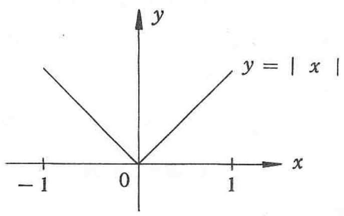

圖３

有了Rolle 定理我們就可推導出Taylor級數定理如下：

定理２：設f爲定義在區間〔a，b〕上的連續函數，且在（a，b）上，f具有$n+1$次的導函數，（即$f^{(n+1)}$存在於（a，b）之上）。則

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+$$

$$\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad \cdots(1)$$

其中 ξ 爲介於 a ，b 之間的一點。一般若 x 爲 (a, b) 中任何一點，則

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(x)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中 $a<\xi<x$ ……(2)

證： 只需要證明式(1)，對式(2)的證明是完全一樣的，考慮輔助函數，

$$F(x)=f(b)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(b-x)-\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n$$

$$-\frac{p}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

其中 p 爲一待定常數（與 a ，b 有關但與 x 無關！）

現 F 滿足定理 1 中所有的條件，除了 $F(a)=F(b)$ 的條件外，但 $F(b)=0$ 故我們可取 p 使得 $F(a)=0$。於是可引用定理 1 得知 $F'(\xi)=0$ $(a<\xi<b)$ ，今微分(3)式，左邊爲 $F'(x)$ 而右邊的項皆互相抵銷，只剩下最後兩項。故

$$F'(x)=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+\frac{(b-x)^n}{n!}p$$

由上式及 $F'(\xi)=0$ 可得

$$p=f^{n+1}(\xi)$$

將此值代回 $F(a)=0$ 中得

$$0=f(b)-f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\cdots\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

即(1)式得證。

註：1. 當 $n=0$ 時，就是所謂的均值定理（Mean-Value theorem）。

2. 此定理告訴我們如何由函數 f 在一點 a 的值及其該點的各階導函數之值，對另一點的值 $f(b)$ 作適當的估計。由於 ξ 點通常爲未知，但我們可把

$$R=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\right|$$

視爲將(1)式右邊前 $(n+1)$ 項作爲 $f(b)$ 的一種估計的最大誤差。而通常一般函數 $|b-a|\geqslant 1$，及 n 相當大時，R 爲很小。此現象在製造函數值表及數值分析上用到。

3. 泰勒級數或展開式

設 f 在點 x_0 的某一鄰域 $N(x_0)$ 中爲有定義的，且在 $N(x_0)$，f 具有任何階的導函數（以 $f\in C^\infty(N(x_0))$ 表之）則我們可形成一特殊形式的冪級數：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

則我們稱上式爲 f 在點 x_0 的泰勒展開式。以

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ 表之}$$

我們自然會問(i)級數(4)除了在點 $x=x_0$ 外是否爲收斂？(ii)若級數(4)在點 x 收斂，是否收斂于 $f(x)$？對此兩問題的答案，一般情形下爲否定的。

例3·1 設

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

則對任何 n，$f^{(n)}(0)$ 存在且皆爲 0，故若取 $x_0=0$，則 f 在 $x=0$ 的泰勒級數恒爲 0，故除了與 f 在點 $x=0$ 重合外，其它處與 $f(x)$ 皆不吻合。

由泰勒公式知，若 $f \in C^{\infty}[a,b]$（表示 f 在 $[a,b]$ 中具有任何階的導函數），及若 $x_0 \in [a,b]$ 則

$$f_{(x)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n$$

其中 x_1 爲介於點 x 與 x_0 之間的一點，所以由上式可知泰勒級數在點 x 收斂且收斂于 $f(x)$ 的主要條件是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n=0 \qquad (5)$$

但上面的條件涉及點 x_1（與 n 有關）。故如果我們能提供 $|f^{(n)}(x_1)|$ 對任何 x_1 的值具有某個上限，使得條件(5)滿足，就可確保 f 的泰勒級數收斂于 $f(x)$。下面的定理就顯得很明白了。

定理3：設 $f \in C^{\infty}[a,b]$ 及 $x_0 \in [a,b]$，若在點 x_0 的一鄰域 $N(x_0)$ 及存在一常數 M 使得 $|f^{(n)}(x)| \leqq M$，$\forall\, x \in N(x_0)\cap[a,b]$，$n$ 爲任一正整數，則對任何 $x \in N(x_0)\cap[a,b]$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (6)$$

注意：由式(6)可得下面一不等式：

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right| \leqq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (7)$$

這在數值分析上多項式逼近估計是有用的。

例3・2：$f(x)=\sin x \quad x \in [-\pi,\pi]$，
（x 表弧度）

則 $\because\ |f^{(n)}(x)| \leq 1$ 及

$$f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1};$$
$$n=1,2,\cdots\cdots$$

$$\therefore\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

即 $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\cdots\cdots\cdots(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\cdots\cdots \qquad (8)$$

這時由於 $|f^{(n)}(x)| \leq 1$，及對任一固定的正數 c，$\dfrac{c^n}{(n+1)!}\to 0$，因此對一事先要求的精確度（如要求精確到小數點 7 位），我們總可得到一相應的正整數 m（與精確度有關）使得對任一 x_0，只要在式(8)中取前面 m 項多項式 $p_m(x)$，計算 $p_m(x_0)$ 就是合精確度下的 $\sin x_0$ 的近似值。三角函數值表及一些特種函數值表就可這樣造出來了。

4.不定型的討論

在分析上一個函數 $f(x)$ 的導函數是指下列形式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

當 $h\to 0$ 時極限存在。我們可以說若一個函數 f 具有導函數，則上式當 $h\to 0$ 時趨向於 $f'(x)$。但另一方面，若我們把 $h=0$ 代入上式分子及分母中，則得

$$\frac{0}{0}$$

的不定型式。而這也是若不加思索說「一個商式的極限爲其分子及分母極限之比值」所得的結果。這個關鍵點是我們忽略了，在這規則中能成立的先決條件是分母之極限值要不爲 0 才行。同樣的是

$$\frac{2z^2+4}{z^2(z-1)}-\frac{6}{z-1}$$

當 $z\to 1$ 時極限值為 6，但我們若直認說「兩式差的極限，為各式極限的差」，上式就導至 $\infty-\infty$ 的不定型。另外常碰到的不定型有 $0.\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，1^∞，∞^0，0^0 等。我們現就討論如何利用泰勒展開式處理這些所謂的"不定型"的技巧。

最簡單的情形是下面的一個結果：

定理4：設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒展開式分別為

$$f(a+h)=a_mh^m+a_{m+1}h^{m+1}+\cdots\cdots$$
$$g(a+h)=b_nh^n+b_{n+1}h^{n+1}+\cdots\cdots$$

其中 a_i，b_j 等皆為常數，分別與 f 在 a 的各階導數值及 g 在 a 的各階導數值有關

則
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\begin{cases}0 & \text{若 } m>n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & \text{若 } m=n\ ,\\ \pm\infty, & \text{若 } m<n\end{cases}$$

證：這是因為當 h 很小時

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{a_m}{b_n}h^{m-n}[1+o(1)]$$

另見定理由此得證。

例4·1 試證 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1-h}{h+h^3}=0$

$\because$ $f(x)=e^x-1-x$ 在點 $a=0$ 的泰勒展開式為

$$f(h)=\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{6}h^3+\cdots\cdots$$

及 $g(h)=h+h^3$

由上定理，立即得所求的結果。

例4·2 試求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\{(1+\frac{1}{x})^x-e\}$；$e$ 為自然對數的底 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，$n$ 為正整數。

解：設 $G(x)=x\{(1+\frac{1}{x})^x-e\}$

我們先證 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ （注意它屬 1^∞ 的不定型）

則對 $G(x)$ 就形成 $\infty\cdot 0$ 的不定型。

我們通常把一個函數 $f(x)$ 在無窮遠點 ∞ 的動態作 $x=\frac{1}{y}$ 的變數變換後，討論新的函數在 0 點的舉止。我們現令

$$G(x)=F(y)=(1+y)^{\frac{1}{y}}$$

由 e 的定義為 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$；$n$ 為正整數。我們有

$$\lim_{n\to\infty}F(\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

現我們要證：只要 y 趨向于 0，則 $F(y)$ 的極限值為 e，即

$$\lim_{y\to 0}F(y)=e\ 。$$

我們將計算 $F(y)-e$ 及 $F'(0)$。為此我們考慮在 $|y|<1$ 時

$$\log F(y)=\frac{1}{y}\log(1+y)=\frac{1}{y}\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\cdots\cdots\}$$
$$=1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

由上式可知 $\log F(y)$ 在 $|y|<1$ 為 y 的一連續可微分的函數。

因而

$$F(y)=exp(\log F(y))$$

也是一連續且可微分的函數。

現因 $\lim\limits_{y\to 0}\log F(y)=1$

$$\therefore\ \lim_{y\to 0}F(y)=e$$

現我們求 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$ 之值。

對式(9)的兩邊作微分得

$$\frac{F'(y)}{F(y)}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}h-\cdots\cdots$$

（上式右邊是逐項微分的結果，要瞭解這個過程的合法性是需要較高深的分析理論，我們不在此介紹，讀者有興趣可翻查一般的高等微積分書必可得到滿意的解說）

由是　令　$y\to 0$　得

$$F'(0)=-\frac{1}{2}e$$

於是

$$\lim_{y\to 0}\frac{F(y)-e}{y}=-\frac{1}{2}e$$

從而　$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=-\frac{1}{2}e$

5.洛皮脫(L'Hospital)法則

附帶在此順便介紹的是,當所涉及的函數在極限點鄰近的導函數存在時，我們對函數的極限值的討論，有時可轉成導函數比值的考慮，往往使得問題很容易解決，這就是所謂的洛皮脫法則。

定理5　設 $f(x)$ 及 $g(x)$　當 $x\to a$（a 可爲∞）時,$f(x)$ 與 $g(x)$ 都同趨向於0（或∞），而至少在點 a 的某個鄰域內（點 a 本身除外），$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g(x)$ 在該鄰域內總不爲0，並且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（也可爲∞），則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{。}$$

這個定理的證明主要是應用了推廣的均值定理。一般微積分的教科書都可找到。

在此提及此法則目的是希望引起讀者注意對用洛比脫法則求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定型式的極限是有條件的，如濫用它就可能出問題的。如

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=0$$

但如用洛比脫法則，就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

而上式中右邊的極限不存在。另外對使用洛比脫法則的合理性也是要注意的。如求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

如逕用洛比脫法則，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\cos x$$
$$=1$$

這個答案雖然是正確的，但在推理的邏輯上是不對的。因我們在使用洛比脫法則中引用了導數公式 $(\sin x)'=\cos x$，而這公式的推導過程中，其實是用了極限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的結果。

6.Taylor定理在不等式上的應用

例題6·1　設 t 爲任意的實數，則

$$e^t\geqslant 1+t$$

證：

將 $f(t)=e^t$ 展開成Taylor 級數具形式(2)，特別我們取 $n=2$，$a=0$　則（注意 $f^{(n)}(0)=1$）

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}e^{\eta}$$
$$\geqslant 1+t\qquad(\because e^{\eta}\geqslant 0)$$

例題6·2 設 x 爲 >0 的實數，求證函數 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=e$ 時有極大值。

證：至少有兩種證明方法，一種是先取對數，然後微分，使此導函數爲 0 的點就是原函數取值的點，即

$$\log f(x)=\frac{\log x}{x}$$

微分得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\doteq\frac{1}{x^2}-\frac{\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

上式的零點是當 $1-\ln x=0$ 即 $x=e$ 時，但還要進一步驗證 $x=e$ 時 $f(x)$ 的確取得極大值（而不是極小值！），這時嚴格的講要檢驗第二次導函數在 $x=e$ 的值，所以並不是很清晰的。

第二種證明是我們下面就要提的，主要的是利用例題 1。

在例題 6.1 中，令 $t=\frac{x-e}{e}$ 從而

$$e^{\frac{x-e}{e}}\geqslant 1+\frac{x-e}{e}=\frac{e}{x}\text{。}$$

化簡得

$$e^{\frac{x}{e}}\geqslant x,$$

兩邊開 x 次得

$$e^{\frac{1}{e}}\geqslant x^{\frac{1}{x}}$$

故易見 $x^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=e$ 時有極大值。

例題6·3 設 $x\geqslant 0$ 則 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$。

證：此結果一般可用洛比脫法則來證明，但我們在此介紹利用 Taylor 級數定理不但可以證明此結果，且可對此收斂的速度有個量度。

首先設 $1>a>0$，則對任何 $x\geqslant 2$，下式成立

$$(1+a)^x>\frac{x(x-1)a^2}{2}$$

此可將 $(1+a)^x$ 視爲 a 的函，利用泰勒級數(2)的形式可得

$$(1+a)^x=1+\frac{xa}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}a^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(1+c)^{x-2}a^3$$

其中 $0\leq c\leq a$ $\because x\geqslant 2$ 故由上式可得

$$(1+a)^x\geqslant\frac{x(x-1)a^2}{2} \tag{10}$$

現，設 $x>1$ 則由 $x^{\frac{1}{x}}<e^{\frac{1}{e}}$ 得

$$1<x^{\frac{1}{x}}=1+a\ ,\ 1>a>0 \tag{11}$$

從而

$$(1+a)^x=x$$

由上式及式(10)兩式得

$$x\geqslant\frac{x(x-1)a^2}{2}$$

解此不等式便有

$$a<\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$ 代入式(11)得

$$1<x^{\frac{1}{x}}<1+\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

即 $x^{\frac{1}{x}}\to 1$ 的速率至少和 $\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\to 0$ 的速率相當。

下面我們介紹一個基本且重要的不等式。

輔理 1 設 $|x|<1$，則對任何實數 $h\geqslant 1$ 或 $h<0$

$$(1+x)^h\geqslant 1+xh \tag{13}$$

證：取 $f(x)=(1+x)^h$，則 $f'(x)=h(1+x)^{h-1}$，$f''(x)=h(h-1)(1+x)^{h-2}$

引用定理 2 可得

$$(1+x)^h$$
$$=1+\frac{h}{1!}x+\frac{h(h-1)}{2!}(1+\eta)^{h-2}x^2$$
$$\geqslant 1+hx$$

（因上式右邊最後一項恒爲正！）。

由輔理 1 可得到一串在高等數學分析中常用到的一些重要不等式。

定理6　設 y 爲任意正實數，α 爲實數，則

$$y^{\alpha}-\alpha y+\alpha-1\geqslant 0\text{；若 }\alpha>1\text{ 或 }\alpha<0 \qquad (14)$$

$$y^{\alpha}-\alpha y+\alpha-1\leq 0\text{；若 }0<\alpha<1 \qquad (15)$$

證：我們只證式(14)。對式(15)的證明是完全一樣的。

令　$\alpha=h$　及 $1+x=y$，則 $y>0$　故由輔理1得

$$y^{h}\geqslant 1+(y-1)h$$

或

$$y^{h}-\alpha y+h-1\geqslant 0$$

不等式：當 $|x|<1$ 及 $0\leq h\leq 1$ 時

即；式(14)得證。至於式(15)可由（讀者可仿輔理1之證法求得）$(1+x)^{h}\leq 1+xh$。

及仿式(14)的證明得到。

定理7　對任意兩正實數 x_1，x_2 及實數 α，

$$x_1^{\alpha}x_2^{1-2}\leq \alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\ \alpha>1\text{ 或 }\alpha<0 \qquad (16)$$

$$x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\geqslant \alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\quad 0<\alpha<1 \qquad (17)$$

證：在定理6，(14)及(15)兩式中，令 $y=\dfrac{x_1}{x_2}$ 代入立即可得(16)及(17)。

上面的一個推廣定理如下：

定理8　設 x_1，x_2，…… x_n　爲 n 個正數，α_1，α_2，…… α_n　亦爲 n 個正實數且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots\alpha_n=1$　　則

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\leqq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \qquad (18)$$

證：用數學歸納法，現由定理7知(18)在 $n=2$ 時成立。假設式(18)對 $n=k$ 時成立，我們將證 $n=k+1$ 時亦成立。首先不妨設在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_{k+1}$，$k+1$ 個數中，$\alpha_k>0$，$\alpha_{k+1}>0$，（否則就不必證明了！）

令　$y_i=x_i$　$\beta_i=\alpha_i$；$i=1,2,\cdots k-1$

及

$$y_k=x_k^{\alpha_k/\beta_k}x_{k+1}^{\alpha_{k+1}/\beta_{k+1}}$$

$$\beta_k=\alpha_k+\alpha_{k+1}$$

則有

$$y_i\geqslant 0,\quad \beta_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{k}\beta_k=1$$

由歸納法假設得知

$$\prod_{i=1}^{k+1}x_i^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{k}y_i^{\beta_i}\leq\sum_{i=1}^{k}\beta_i y_i$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i x_i$$

$$+(\alpha_k+\alpha_{k+1})(x_k^{\alpha_k/\beta_k}x_{k+1}^{\alpha_{k+1}/\beta_k})$$

$$\leq\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i x_i$$

$$+(\alpha_k+\alpha_{k+1})\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}x_k+\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_k}x_{k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i$$

即原式對 $n=k+1$ 亦成立，由歸納法原理知式(18)對所有的 n 皆成立，定理8因此得證。

在定理8中若令 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots\alpha_n=\dfrac{1}{n}$，立即可得下面有名及常用的一些系理。

系理1　（算術與幾何的平均定理），設 x_1，x_2，…… x_n　爲 n 個 $\geqslant 0$ 的實數，則

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

系理2　設 a，b 爲兩正數，p，q 爲不等於0，1且滿足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

的兩實數，則

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqq\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\qquad(p>1) \qquad (19)$$

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\qquad(p<1) \qquad (20)$$

證：這是定理7的另一種形式而已。

設 p，q 爲滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 的兩正實數，令

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i^p\ ,\ Y=\sum_{i=1}^{n}y_i^q\ ,\ a_i=x_i^p/x\ ,$$

$$b_i=y_i^q/Y\ ,\ i=1\ ,\ 2\cdots\cdots n$$

遂次將 a_i 及 b_i 代入⑲式中相加終於可得。

系理3 赫爾德（Hölder）不等式，若 $x_i\geqslant 0$，$y_i\geqslant 0$，$i=1$，$2\cdots\cdots$，n，

$p>1$，$q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，則

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqq(\sum_{i=1}^{n}x_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}x_i^q)^{\frac{1}{q}} \tag{21}$$

證：讀者不妨試討論一下以上的一些不等式，其等號在什麼情形下才成立。

利用系理3，又可導致下面一結果。

系理4 明可士基（Minkowski）不等式，設 x_i，y_i；$i=1$，2，……，n 皆爲非負的實數，$p>1$，則

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq(\sum_{i=1}^{n}x_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}y_i^p)^{\frac{1}{p}} \tag{22}$$

（若 $p<1$ 則上不等式反向！）

證：由

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i$$

將上式右邊兩項分別應用系理3及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，即

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i\leq(\sum_{i=1}^{n}x_i^p)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i\leq(\sum_{i=1}^{n}y_i^p)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

上兩式相加得

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\leq$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_1+y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}\left[(\sum_{i=1}^{n}x_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}y_i^p)^{\frac{1}{p}}\right]$$

上式兩邊除以 $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}$ 及利用 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ 就得到⑯式。

讀者不難證明當 $0<p<1$ 時不等式㉒的不等號反向。由此只取兩項其他項爲0，可得下面不等式：

$$|a+b|^p<(|a|+|b|)^p\leqq|\alpha|^p+|b|^p\ ;\ 0<p<1$$

又由上面不等式可推演得

$$\sum_{n=1}^{k}|a_n+b_n|^p\leqq\sum_{n=1}^{k}|a_n|^p+\sum_{n=1}^{k}|b_n|^p$$

$$0<p<1$$

一個似乎極明顯的事實是若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^s<\infty$，則可想見對 $n>s$ 時 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^t<\infty$。這是因爲 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^s<\infty$ 收斂。其表示當 $n\geqslant n_0$，是充分大的正整數時 $|a_n|^s<1$，於是 $n\geqslant n_0$ 時 $|a_n|^t<|a_n|^s$，由此立即可證得 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^t<\infty$ 的事實。

下面是剛剛提及的結果的一個推廣。

定理9 （Jensen 不等式）：設 $p>0$，則 $f(p)=(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ 爲 p 爲一漸減函數。

即若 $q>p$ 則 $f(p)>f(q)$。

證：設 $q>p$，令 $m=(\sum|a_n|^q)^{\frac{1}{q}}$，則

$$|a_n|/m\leq 1\ ,\ n=1\ ,\ 2\ ,\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad (|a_n|/m)^p \geqslant (|a_n|/m)^q,$$

$$n=1,2,\cdots\cdots$$

因此 $\frac{1}{m}(\Sigma|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}=\left[\Sigma\left(\frac{|a_n|}{m}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant$

$$\left[\Sigma\left(\frac{|a_n|}{m}\right)^q\right]^{\frac{1}{p}}=1 。$$

兩邊乘以 m 得

$$(\Sigma|a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant m=(\Sigma|a_n|^q)^{\frac{1}{q}}$$

讀者如果熟習了以上的一些不等式就無形中掌握了研究高深理論分析的有力工具。

—本文作者任職於美國海軍實驗室—