同理我們對每一個m皆可定義由n（$n>1$）開始的Goodstein 數列。相信當我們初看到這樣的數列時，我們都會覺得這數列增加的實在快，也就覺得這數列會這樣一直的增加下去，但令人不可思議的是Goodstein 竟然證明了下面的這個定理：

$\forall m \exists k \quad m_k=0$（對任何一個$m$存在一個$k$，使得$m_k=0$）；而且對任何的$m$和$n>1$（即不限定$n=2$），$m$由$n$開始的Goodstein 數列至終都會為零。

這個定理若用數字真的去算的話，即使是很小的數字算起來也不得了，但我們可用3，4，5分別去算算Goodstein 數列的前十項，（$3_5=0$），也許可以感覺到這個定理有可能是對的。我們也許會問這個定理是怎麼證明的？這個證明是用到集合論的一些結果，在此無法細說，只提到一個名詞，這個證明是用集合論中的“超限歸納法”（Transfinite induction），超限歸納法是一般數學歸納法的推廣，或者可說數學歸納法是超限歸納法的一個特例。

Goodstein 證明了這個定理：

$\forall m \exists k \quad m_k=0$，

而Kirby 和Paris則證明了這個定理是無法用一般的數學歸納法證明，他們也藉此證明了“九頭怪蛇”這個問題，只要耐心的砍下去，雖然要砍的很久，但遲早會砍完，而不會像中國神話故事裏的吳剛伐桂永遠砍不完。

—本文作者任教於中原大學數學系—

本期徵答問題

10401 相交直線分割平面問題（陳耀煌、朱建正 提供）

n 條直線互不平行。其中有 m_2 個交點為兩線共點，m_3 個點為三線共點，……，m_h 個點為 h 線共點。則此 n 條直線把平面分成幾個區域？

10402 集合問題（蕭鴻銘 提供）

令$S=\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\}$為$n$個相異實數的集合，任取相異的$x_i$與$x_j$，以$d_{ij}=|x_i-x_j|$表兩者間的距離。令$d(S)=|\{d_{ij}\mid i\neq j\}|$，即$S$中所有可能的非零距離數。請證明：當$n\geqslant 2$且$n-1\leqslant k\leqslant\binom{n}{2}$時，總可以找到$S$使得$d(S)=k$。